Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2016

Prüfungsfach:	**Mathematik** **(nichttechnische Ausbildungsrichtung)**
Prüfungstag:	**Donnerstag, 16. Juni 2016**
Prüfungsdauer:	**9:00 Uhr – 12:00 Uhr**
Hilfsmittel:	**Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner;** **Merkhilfe Mathematik (Technik)**
Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule. Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.
Bewertungsschlüssel:	

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

Aufgabe I

BE

1.0 Die Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades. Der Graph G_f der Funktion f hat im Koordinatenursprung einen Terrassenpunkt und im Punkt $W(-2/-2)$ einen Wendepunkt.

1.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. 5

[mögliches Ergebnis: $f(x) = 0{,}125x^4 + 0{,}5x^3$]

1.2 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie deren jeweilige Vielfachheit an. 2

1.3 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f und geben Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_f an. 5

1.4 Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen der beiden Wendetangenten G_{w_1} und G_{w_2} an G_f. 2

[mögliches Teilergebnis: $w_1(x) = 2x + 2$]

1.5 Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionen f und w_1 neben dem Wendepunkt W aus 1.0 einen weiteren gemeinsamen Punkt $S(2/y_S)$ haben. 2

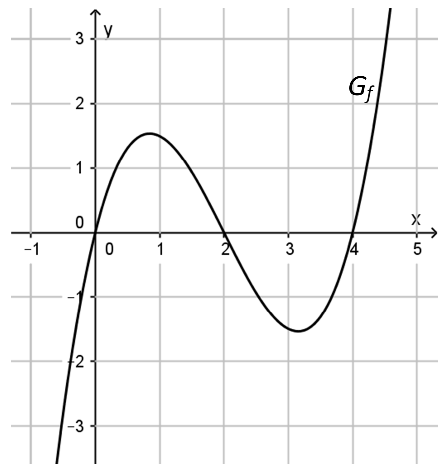
1.6 Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte sowie die Wendetangente G_{w_1} aus 1.4 für $-4{,}5 \le x \le 2{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 4
Maßstab auf beiden Achsen: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$.

1.7 Die Graphen von w_1 und f schließen ein endliches Flächenstück ein. 5
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Aufgabe 1.6 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts.

Aufgabe II

BE

2.0 Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f vom Grad drei mit $D_f = \mathbb{R}$. Die Nullstellen der Funktion f sind ganzzahlig und der Punkt $P(1/1{,}5)$ liegt auf G_f.



2.1 Bestimmen Sie mit Hilfe der obigen Abbildung den Funktionsterm der Funktion f und zeigen Sie, dass sich dieser wie folgt darstellen lässt: $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 4x$. 4

2.2 Bestimmen Sie Art und Koordinaten aller relativer Extrempunkte von G_f. Runden Sie die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen. 5

2.3 Zeigen Sie, dass die Wendetangente G_w an den Graphen von f die Gleichung $y = -2x + 4$ hat. 6
Zeichnen Sie den Graphen G_f in ein Koordinatensystem ein und ergänzen Sie Ihre Zeichnung zusätzlich durch die Wendetangente G_w.

2.4 Die Wendetangente G_w bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie die Maßzahl A_D des Flächeninhalts dieses Dreiecks. 2
$\left[\text{Ergebnis: } A_D = 4 \text{ [FE]}\right]$

2.5 Der Graph der Funktion f schließt im I. Quadranten des Koordinatensystems mit der y-Achse und der Wendetangente G_w ein Flächenstück ein. 5
Schraffieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Aufgabe 2.3 und zeigen Sie, dass dieses Flächenstück genau halb so groß wie die Dreiecksfläche aus Aufgabe 2.4 ist.

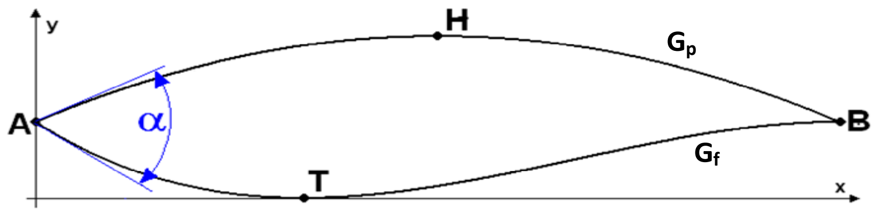
2.6 Zeigen Sie, dass gilt: $\int_0^4 f(x)\,dx = 0$ und geben Sie mit einer kurzen Begründung – ohne weitere Berechnung! – den Wert des Integrals $\int_2^4 f(x)\,dx$ an. 3

25

Aufgabe III

BE

3.0 Ein Flugzeughersteller experimentiert mit einem neuartigen Flügelquerschnitt. Für erste Versuche im Windkanal wird ein Modell gebaut:



Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu.
Bezüglich des zugrunde gelegten Koordinatensystems beschreibt die quadratische Funktion p die in der Skizze dargestellte Kontur der Flügeloberseite. Die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{300}\left(-x^3+30x^2-225x+500\right)$ beschreibt die Kontur der Flügelunterseite.
Dabei ist $D_p=D_f=[0;15]$.
Der gemeinsame Punkt A der beiden Graphen der Funktionen p und f liegt auf der y-Achse.
Dabei sind x, $f(x)$ und $p(x)$ jeweils als Vielfache der Längeneinheit dm zu interpretieren. Auf die Mitführung von Maßeinheiten wird verzichtet.

3.1 Für die Konstruktion der Flügeloberkante (Graph der Funktion p) soll gelten: 5
– Lage des höchsten Punktes H bei $x_H=7{,}5$
– Steigung der Umrisslinie im Punkt A: $m=0{,}5$
Bestimmen Sie den quadratischen Funktionsterm $p(x)$.
[mögliches Ergebnis: $p(x)=\frac{1}{30}\left(-x^2+15x+50\right)$]

3.2 Der „Auflagepunkt", auf dem der Flügel auf der x-Achse aufsitzt, ist der Punkt T, der gleich dem lokalen Tiefpunkt von G_f auf D_f ist. 5
Weisen Sie die Existenz des relativen Tiefpunktes von G_f rechnerisch nach und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T.

3.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass die Definitionsmenge $D_d=[0;15]$ der Funktion d mit dem Term $d(x)=p(x)-f(x)=\frac{1}{300}\left(x^3-40x^2+375x\right)$ mit $D_d=D_p=D_f=[0;15]$ in Zusammenhang mit dem Bau des Flügels sinnvoll angesetzt ist. 3

3.4 Durch senkrechte Streben wird das Modell des Flügels verstärkt. Die Länge dieser Streben wird durch die Funktionswerte $d(x)$ mit $D_d=[0;15]$ festgelegt. 6
Berechnen Sie die maximal mögliche Länge einer solchen senkrechten Strebe in Millimetern.

3.5 Aus einer rechteckigen Holzplatte mit einer Länge von 15 dm und einer Breite von 3,6 dm wird die Querschnittsfläche des Flugzeugflügels ausgeschnitten. Berechnen Sie, wie viel Prozent der Rechtecksfläche diese Querschnittsfläche einnimmt. 6

25

Aufgabe IV

		BE
4.0	Ein Lebensmittelunternehmen stellt Glücksbärchen aus Marzipan her. Die Produktionskosten $k(x)$ für diese Süßigkeit lassen sich mit folgendem Funktionsterm der Funktion k berechnen: $k(x)=0,5x^3-4,5x^2+13,5x+1,5$. $k(x)$ gibt die Kosten in 100.000,00 EUR an und der Wert für x steht für die Anzahl der produzierten Paletten mit jeweils 100.000 Bärchen. Für die folgenden Rechnungen werden alle Funktionen zur Vereinfachung auf dem Definitionsbereich $D=\{x\in\mathbb{R}\,\vert\,0\le x\le 7\}$ definiert. Auf das Mitführen von Einheiten wird verzichtet.	
4.1	Zeigen Sie, dass die Kosten $k(x)$ auf D_k mit zunehmender Produktionsmenge ebenfalls zunehmen.	4
4.2	Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P des Graphen von k, in dem dieser die geringste Steigung hat und geben Sie die Bedeutung dieses Punktes für den Graphen von k an.	3
4.3	Ein Marzipanbärchen wird für 5,00 EUR verkauft. Die Erlösfunktion ist daher $e(x)=5x$ (Erlös $e(x)$ ebenfalls in 100.000,00 EUR). Der Gewinn oder Verlust wird durch die Funktion $g(x)=e(x)-k(x)$ mit $D_g=D_e=D_k=[0;7]$ beschrieben. Zeigen Sie, dass $k(3)=e(3)$ ist und interpretieren Sie diese Tatsache im vorliegenden Sachzusammenhang.	2
4.4	Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion g. Geben Sie an, für welche Stückzahlen produzierter Marzipanbärchen ein Gewinn bzw. ein Verlust erzielt wird.	6
4.5	Berechnen Sie den größtmöglichen Gewinn, den das Unternehmen bei der Produktion von Marzipanbärchen erzielen kann.	5
4.6	Zeichnen Sie die Graphen der Kostenfunktion k und der Erlösfunktion e anhand Ihrer bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem ein. Kennzeichnen Sie darin auch den größtmöglichen Gewinn. Maßstab: 1 cm ≙ 100.000 Stück; 1 cm ≙ 500.000,00 EUR	5
		25

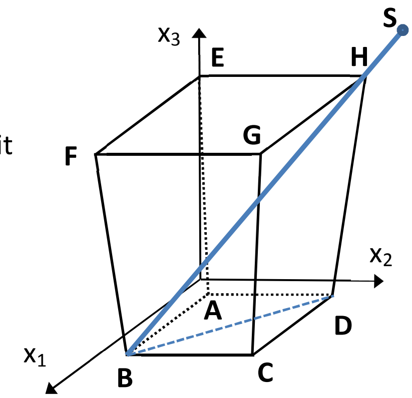
Aufgabe V

BE

5.0 Ein Unternehmen stellt Pflanzkübel in der Form eines geraden Pyramidenstumpfes her. Die Eckpunkte haben folgende Koordinaten:

$A(1/1/0)$, $B(4/1/0)$, $C(4/4/0)$, $D(1/4/0)$,
$E(0/0/8)$, $F(5/0/8)$, $G(5/5/8)$, $H(0/5/8)$.

Die Koordinaten sind als Vielfache der Längeneinheit dm aufzufassen. Auf die Verwendung der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Die nebenstehende Skizze ist nicht maßstabsgetreu.



5.1 Zeigen Sie, dass die Bodenfläche ABCD des Pflanzkübels quadratisch ist und berechnen Sie die Maßzahl ihres Flächeninhalts. 4

5.2 Um das Ablaufen des Wassers nach dem Gießen zu ermöglichen, soll ein Loch in der Mitte der Bodenfläche gebohrt werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Bohrloches M. 2

5.3 Ein dünner Bambusstab wird in dem Pflanzkübel in den Punkten B und H befestigt. Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels $\sphericalangle DBH$ des Bambusstabes zur Bodenfläche. 4

5.4 Der in 5.3 erwähnte Bambusstab befindet sich zu zwei Drittel im Pflanzkübel und ragt zu einem Drittel heraus. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S des Bambusstabes und geben Sie an, welche Höhe die Spitze gegenüber der Bodenfläche hat. 4

5.5 Zeigen Sie, dass der Vektor $\overrightarrow{AE}$ als Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DH}$ und $\overrightarrow{BC}$ dargestellt werden kann. 5

5.6 Die äußeren Flächen der Seitenwände des Pflanzenkübels sollen gestrichen werden. Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der insgesamt zu streichenden Fläche. Hinweis: Jedes Viereck lässt sich in zwei Dreiecke zerlegen. 4

5.7 Um den Pflanzkübel vollständig in einen quaderförmigen Karton zu verpacken, werden die Innenmaße des Kartons benötigt.
Geben Sie die minimale Breite, Länge und Höhe eines Kartons an. 2

25