Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2016

Prüfungsfach:	**Mathematik** **(technische Ausbildungsrichtung)**
Prüfungstag:	**Donnerstag, 16. Juni 2016**
Prüfungsdauer:	**9:00 Uhr – 12:00 Uhr**
Hilfsmittel:	**Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner;** **Merkhilfe Mathematik (Technik)**
Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule. Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.
Bewertungsschlüssel:	

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

Aufgabe I

BE

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion f durch ihren Funktionsterm $f(x)=\frac{2x^2}{(x-1)^2}$ auf der maximalen Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_f.

1.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_f an und bestimmen Sie die Nullstelle von f. 2

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ sowie in der Umgebung von eventuell existierenden Definitionslücken.
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an. 5

1.3 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen G_f steigt bzw. fällt.
Ermitteln Sie damit Art und Koordinaten des relativen Extrempunkts von G_f.
[mögliches Teilergebnis: $f'(x)=-\frac{4x}{(x-1)^3}$] 6

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und mit Hilfe weiterer geeigneter Punkte im Bereich $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
(Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE $\triangleq$ 1 cm) 5

1.5 Nun wird die Definitionsmenge der Funktion f auf das Intervall $\mathrm{I}=]-\infty;1[$ eingeschränkt.
Zeigen Sie, dass die Funktion F mit dem Funktionsterm
$F(x)=2x-\frac{2}{x-1}+4\cdot\ln(1-x)$ auf dem Intervall I eine Stammfunktion von f ist. 4

1.6 F_c ist die Menge aller Stammfunktionen von f auf dem Definitionsbereich $\mathrm{I}=]-\infty;1[$.
Begründen Sie ohne Rechnung unter Verwendung bisheriger Ergebnisse, dass die Graphen aller Stammfunktionen F_c jeweils einen Terrassenpunkt besitzen. 3

25

Aufgabe II

		BE
2.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: t \mapsto f(t)$ mit $f(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$ auf der Definitionsmenge $D_f = [-\pi; \pi]$. Der Graph dieser Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_f. Die Einheit der Variable t (Sekunde) wird nicht mitgeführt.	
2.1	Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.	4
2.2	Geben Sie als Vorüberlegung allgemein diejenigen Werte für x_k an, für die $\sin(x_k) = \pm 1$ gilt. Verwenden Sie diese Werte, um die Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f zu ermitteln.	6
2.3	Bestimmen Sie die Periodenlänge von f.	2
2.4	Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f.	4
2.5	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f in ein Koordinatensystem für $-\pi \le x \le \pi$.	4
2.6	Berechnen Sie den Wert des folgenden bestimmten Integrals: $\int_0^{\pi/3} f(t)\,dt$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich Ihrer Zeichnung aus Aufgabe 2.5.	5
		25

Aufgabe III

BE

3.0 Ein frisch eingeschenkter Espresso hat zum Zeitpunkt $t = 0$ min die Temperatur T_0. Der Espresso kühlt in einem Raum mit der Temperatur T_R nach der Beobachtungszeit t auf natürliche Weise auf die Temperatur $T(t)$ ab. Der zeitliche Verlauf der Temperatur kann näherungsweise mit dem Term $T(t) = T_R + (T_0 - T_R) \cdot e^{-kt}$ mit $D_T = [0; \infty[$ beschrieben werden (t in Minuten, T in °C, Abkühlkonstante $k > 0$ in min^{-1}). Auf die Mitführung von Einheiten kann verzichtet werden.

3.1 Führen Sie eine Grenzwertbetrachtung von T für $t \to \infty$ durch und interpretieren Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich der oben beschriebenen Situation. 3

3.2 In einem Versuch werden folgende Messwerte aufgenommen: 5

$T_0 = 92\,°\text{C}$ $\qquad$ $T(9\text{ min}) = 48\,°\text{C}$ $\qquad$ $T_R = 22\,°\text{C}$

Berechnen Sie den Wert der Konstanten k.

Im Folgenden ist die Abkühlkonstante für einen Espresso $k = 0{,}11\ \text{min}^{-1}$.

3.3 Berechnen Sie die Abkühlgeschwindigkeit $T'(t)$ zur Zeit $t = 5$ min. Argumentieren Sie plausibel, zu welchem Zeitpunkt der Betrag der Abkühlgeschwindigkeit seinen maximalen Wert aufweist und berechnen Sie diesen Betrag. 5

3.4 Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf der Temperatur des Espressos für $0 \le t \le 20$ min unter Verwendung einer Wertetabelle mit Schrittweite $\Delta t = 4$ min sowie die Asymptote des Graphen von T in ein Koordinatensystem. 5

3.5.0 Ein Gast im Café bestellt eine Latte macchiato gemischt aus 150 ml warmer geschäumter Milch und 30 ml Espresso. Aufgrund des hohen Besucherandrangs vergehen eventuell einige Minuten, bis das Getränk gemischt und serviert wird. Die Mischtemperatur von Espresso und Milch lässt sich nach erfolgtem Wärmeaustausch mit der Formel $T_{misch} = \dfrac{585 \cdot T_{Milch} + 126 \cdot T_{Kaffee}}{711}$ berechnen.

3.5.1 Berechnen Sie die Mischtemperatur T_{misch} der Latte macchiato, wenn zur frisch aufgeschäumten Milch ($T_{Milch} = 55\,°\text{C}$) ein Espresso zugegeben wird, der vier Minuten vorher gebrüht wurde und bis zur Zugabe abkühlte. 3

3.5.2 Die Abkühlkonstante für das fertig gemischte Getränk beträgt aufgrund der isolierenden Wirkung des Milchschaums $k = 0{,}021\ \text{min}^{-1}$. 4
Berechnen Sie die Temperatur des Getränks nach vier Minuten Abkühlungszeit, wenn zum $55\,°\text{C}$ warmen Milchschaum der Espresso sofort nach seiner Zubereitung beigemischt wird.
Entscheiden Sie, mit welcher Zubereitungsvariante (3.5.1 bzw. 3.5.2) die Latte macchiato heißer beim Gast ankommt.

25

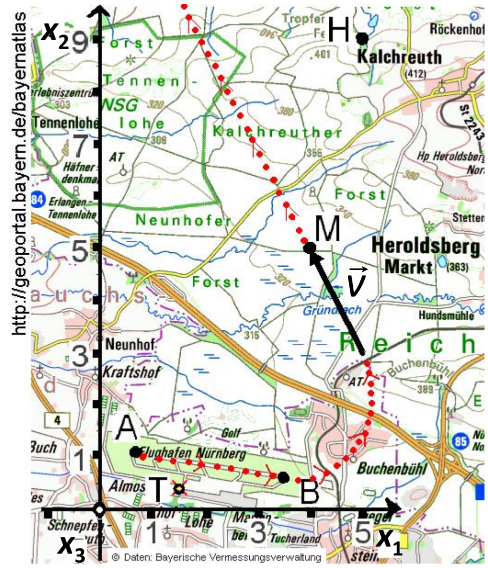
Aufgabe IV

		BE
4.0	In einer Konditorei werden Torten für den Folgetag auf Bestellung hergestellt. Abhängig von der bestellten Stückzahl *x* berechnen sich die gesamten Herstellkosten $K(x)$ gemäß dem Funktionsterm: $K(x)=0{,}2x^3-1{,}8x^2+20x+24$. Nach Abzug der Mehrwertsteuer bleiben dem Konditor tatsächlich 29,20 EUR Einnahmen pro Torte. Aus Kapazitätsgründen können nur maximal 15 Torten pro Tag produziert werden. Der Graph der Kostenfunktion *K* in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_K. Für die folgenden Rechnungen werden alle Funktionen zur Vereinfachung auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $D=\{x\in\mathrm{IR}\,\vert\,0<x\leq 15\}$ definiert. Auf das Mitführen von Einheiten wird verzichtet.	
4.1	Der Gewinn des Konditors ergibt sich aus der Differenz der tatsächlich erzielten Einnahmen und der gesamten Herstellkosten. Ermitteln Sie einen Term $G(x)$ zur Berechnung des Gewinns in Abhängigkeit der Anzahl der verkauften Torten. [mögliches Ergebnis: $G(x)=-0{,}2x^3+1{,}8x^2+9{,}2x-24$]	3
4.2	Bei $x_1=2$ hat die Funktion *G* eine Nullstelle. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen der Funktion *G* und interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstellen im Sachzusammenhang.	7
4.3	Bestimmen Sie die Stückzahl $n\in\mathbb{N}$ von verkauften Torten, bei der der Konditor maximalen Gewinn erwirtschaftet. Berechnen Sie diesen maximalen Gewinn.	6
4.4	Stellen Sie den Graphen der Gewinnfunktion *G* in einem kartesischen Koordinatensystem im Bereich $0<x\leq 15$ dar. Verwenden Sie dafür Ihre bisherigen Ergebnisse und kennzeichnen Sie die Stückzahlen, für die der Konditor Gewinn erzielt. [zu verwendender Maßstab: *x*-Achse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{ME}$; *y*-Achse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 20\,\text{EUR}$]	5
4.5	Ein Kunde bestellt genau eine Torte. Ermitteln Sie für diesen Fall einen Mindestverkaufspreis inklusive Mehrwertsteuer (hier 7 % MwSt), sodass der Konditor bei Einzelbestellungen keinen Verlust erzielt.	4
		25

Aufgabe V

BE

5.0 Die Flugbewegungen in der Umgebung des Nürnberger Flughafens werden in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt (siehe Abbildung; in der x_1-x_2-Ebene des Koordinatensystems ist eine zweidimensionale topographische Karte hinterlegt).



Folgende Punkte sind bekannt:
Begrenzungspunkt A der Startbahn $A(0,7/1,1/0,3)$,
Begrenzungspunkt B der Startbahn $B(3,5/0,6/0,3)$,
Fußpunkt T des Towers $T(1,5/0,4/0,3)$.
Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Flughafen vollständig in ebenem Gelände liegt.
Eine Längeneinheit in der Karte entspricht einem Kilometer in der Realität. Auf die Mitführung von Einheiten während der Berechnung wird verzichtet.

5.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E, in der der Flughafen liegt, in Parameter- und Koordinatenform. 5
Welche besondere Lage hat diese Ebene im Koordinatensystem?
[Mögliches Teilergebnis: $E: x_3 = 0,3$]

5.2.0 Ein Flugzeug F_1 bewegt sich nach dem Abheben von der Startbahn und dem Einschlagen der Reiserichtung bis zum Erreichen der Reiseflughöhe von 11,7 km über der Ebene, in der sich der Flughafen befindet, näherungsweise geradlinig in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und fliegt dabei durch den Punkt $M(4/5/3)$.

5.2.1 Berechnen Sie den Winkel zwischen der Flugbahn des Flugzeuges F_1 während des Steigens und der Ebene, in der sich der Flughafen befindet. 2

5.2.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R, in dem das Flugzeug F_1 seine Reiseflughöhe erreicht und bestimmen Sie die horizontale Entfernung *a* über Grund, die es bis dorthin ab dem Durchfliegen des Punktes M zurückgelegt hat. 6

5.2.3 Nach dem Erreichen des Punktes M sieht der Pilot einen Heißluftballon, der sich näherungsweise ortsfest im Punkt $H(5/9/2)$ befindet. 6
Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Punktes der Flugbahn von F_1 während des Steigens, in dem das Flugzeug F_1 die geringste Entfernung zum Heißluftballon H hat.
Berechnen Sie sodann diesen geringsten Abstand zwischen Flugzeug F_1 und Heißluftballon H.

Aufgabe V (Fortsetzung) **BE**

5.3 Die geradlinige Flugbahn eines zweiten Flugzeuges F_2 wird durch die Gerade 5

$f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \; \lambda \in \mathbb{R}$ beschrieben.

Die Grenze zu einem anderen Luftraumabschnitt wird in der Nähe des Flugzeuges F_2 durch die Ebene $G: 3x_1 + x_2 + 9 = 0$ festgelegt.

Zeigen Sie, dass F_2 echt parallel zu dieser Grenze G fliegt und berechnen Sie den Abstand zwischen Flugbahn und Luftraumgrenze.

5.4 Beurteilen Sie, ob das kartesische Koordinatensystem neben der Modellierung der Bewegungen im Umfeld eines Flughafens auch für die Darstellung globaler Flugbewegungen geeignet erscheint. 1

25