

Fachabiturprüfung 2017 zum Erwerb der Fachhochschulreife an
Fachoberschulen und Berufsoberschulen

M A T H E M A T I K

Ausbildungsrichtung Technik

Donnerstag, 1. Juni 2017, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A: Analysis

A I

BE	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{(x-2)^2}{1+0,25 \cdot x^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion wird mit G_f bezeichnet.
3	1.1	Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie Art und Gleichung der Asymptote von G_f an.
4	1.2	Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit seiner Asymptote.
10	1.3	Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_f . [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{(1 + 0,25 \cdot x^2)^2}$]
5	1.4	Geben Sie die Nullstelle von f sowie deren Vielfachheit an und zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von f sowie dessen Asymptote für $-6 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Berücksichtigen Sie dabei, dass der Graph von f den Hochpunkt $H(-2 8)$ besitzt, ein Nachweis ist nicht erforderlich. Maßstab: $1 \text{ LE} \triangleq 1 \text{ cm}$.
3	1.5	Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto -8 \cdot \ln(x^2 + 4) + 4 \cdot x$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.
4	1.6	Der Graph G_f schließt zusammen mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus 1.4 und zeigen Sie, dass die Maßzahl seines Flächeninhaltes $A = 8 \cdot (1 - \ln(2))$ beträgt.
	2.0	Gegeben sind nun die reellen Funktionen $f_a: x \mapsto \frac{-4 \cdot (a-1) \cdot x}{1+0,25 \cdot x^2} + 4$ in der vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ unabhängigen Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.
4	2.1	Überprüfen Sie, ob die Funktion f aus Aufgabe 1.0 zur Funktionenschar f_a gehört.
6	2.2	Bestimmen Sie alle Werte von a , für welche f_a genau zwei einfache Nullstellen besitzt.
4	2.3	Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, sodass G_{f_a} symmetrisch zur y -Achse ist.
5	2.4	Ermitteln Sie alle Werte von a , für welche die Tangente an der Stelle $x = 0$ an den Graphen G_{f_a} einen Steigungswert von $m \leq -4$ aufweist.

BE	<p><i>Fortsetzung A I:</i></p> <p>3.0 Zur Gewinnung von Energieholz eignen sich schnell wachsende Pappeln, deren Wachstum über einen Zeitraum von 10 Jahren beobachtet wird. Die Höhe der Pappeln (in Metern) kann näherungsweise durch die Funktion</p> $H: t \mapsto \frac{a \cdot e^{k \cdot (t-2)}}{3 + 2 \cdot e^{k \cdot (t-2)}} \text{ mit } a, k, t \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0, k > 0, t \in [0; 10]$ <p>beschrieben werden, wobei t die Zeit in Jahren ab dem Beobachtungsbeginn ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Pappel eingepflanzt und hat bereits eine gewisse Höhe. Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn erreicht die Pappel eine Höhe von 8 Metern und in den darauffolgenden 5 Jahren wächst sie um weitere 11,8 Meter.</p> <p>Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.</p> <p>5 3.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und k.</p> <p>Für die folgenden Teilaufgaben gilt $a = 40$ und $k = 1,0$.</p> <p>5 3.2 Berechnen Sie den Höhenzuwachs der Pappel innerhalb der ersten zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn und zeichnen Sie unter Verwendung geeigneter Funktionswerte den Graphen von H für den gesamten Beobachtungszeitraum in ein geeignetes Koordinatensystem.</p> <p>7 3.3 Zusätzlich zur Funktion H ist ihre Ableitungsfunktion mit</p> $H: t \mapsto \frac{120 \cdot e^{t-2}}{(3 + 2 \cdot e^{t-2})^2} \text{ gegeben (Nachweis nicht erforderlich).}$ <p>Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_w, an dem die Pappeln am stärksten wachsen.</p> <p>5 3.4 Eine langsam wachsende Baumart lässt sich modellhaft im gleichen Zeitraum $t \in [0; 10]$ durch eine der drei Funktionen mit den Funktionsgleichungen (1), (2) oder (3) mit dem Parameter $b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ beschreiben. Diese langsam wachsende Baumart hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die gleiche Höhe (in Metern) wie die Pappel, sie benötigt allerdings doppelt so lange, um auf eine bestimmte Höhe zu wachsen.</p> $(1) L_1(t) = \frac{40 \cdot e^{t-2+b}}{3 + 2 \cdot e^{t-2+b}} \quad (2) L_2(t) = b \cdot \frac{40 \cdot e^{t-2}}{3 + 2 \cdot e^{t-2}} \quad (3) L_3(t) = \frac{40 \cdot e^{b \cdot t-2}}{3 + 2 \cdot e^{b \cdot t-2}}$ <p>Schließen Sie mit geeigneter Argumentation zwei der vorgegebenen Funktionsgleichungen aus. Geben Sie weiterhin den Wert von b für die zutreffende Funktionsgleichung an.</p>
70	

Aufgabengruppe A: Analysis

A II

BE	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{6 \cdot e^x}{e^{2x} + 1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
5	1.1	Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $ x \rightarrow \infty$. Geben Sie Art und Gleichung der Asymptote des Graphen von f an.
4	1.2	Untersuchen Sie den Graph von f auf Symmetrie zum Koordinatensystem.
8	1.3	Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und ermitteln Sie damit Koordinaten und Art des Extrempunkts des Graphen von f . [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = (6e^x - 6e^{3x}) \cdot (e^{2x} + 1)^{-2}$]
5	1.4	Zeigen Sie, dass der Ansatz $f''(x) = 0$ auf die Gleichung $e^{4x} - 6e^{2x} + 1 = 0$ führt.
6	1.5	Der Graph von f besitzt im 1. Quadranten genau einen Wendepunkt W_1 . Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes W_1 auf zwei Nachkommastellen gerundet.
5	1.6	Zeichnen Sie unter der Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f sowie mit Farbe seine Asymptote für $-4 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm
	1.7.0	Gegeben sind zudem die reellen Funktionen $h: x \mapsto \frac{2 \cdot e^{2x}}{e^{2x} + 1}$ und $H: x \mapsto \ln(e^{a \cdot x} + b)$ mit den Definitionsmengen $D_h = D_H = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.
6	1.7.1	Die Koeffizienten a und b sind dadurch festgelegt, dass der Graph von H die y -Achse im Punkt $T(0 \ln(2))$ schneidet und die Tangente an den Graphen von H im Punkt T parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten verläuft. Berechnen Sie mithilfe dieser Angaben die Koeffizienten a und b . Zeigen Sie danach, dass die Funktion H eine Stammfunktion der Funktion h in D_H ist. [Teilergebnis: $a = 2$; $b = 1$]
9	1.7.2	Der Graph von h und die x -Achse schließen mit den senkrechten Geraden mit den Gleichungen $x = x_S$ und $x = u$ mit $u \in \mathbb{R}$ und $u > x_S$ im 1. Quadranten ein Flächenstück ein. Dabei ist x_S die Schnittstelle der Graphen von f und h . Zeigen Sie, dass für die Maßzahl $A(u)$ des Flächeninhalts gilt: $A(u) = \ln\left(\frac{e^{2u} + 1}{10}\right)$. Bestimmen Sie anschließend den Wert von u so, dass die Flächenmaßzahl $A(u)$ den Wert $\ln(5)$ annimmt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	Fortsetzung A II:	
	2.0	<p>Unter der Tageslänge versteht man die Dauer von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang. Sie ist von der geographischen Breite des Ortes abhängig. Es wurden die Tageslängen in München im Jahr 2016 (Schaltjahr mit 366 Tagen) aufgezeichnet. Die maximale Tageslänge betrug 16,12 h, die minimale Tageslänge 8,40 h. Die Tageslänge am 1.1.2016 (0. Tag) betrug 8,46 h (Wert geringfügig verändert).</p> <p>Die Funktion $g: t \mapsto a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$ mit $a, b, c, d, t \in \mathbb{R} \wedge t \in [0; 366[$ wird nun modellhaft zur Darstellung der Aufzeichnungen verwendet. t beschreibt dabei die Anzahl der vergangenen Tage ab Beginn des 1.1.2016 und der Funktionswert $g(t)$ die Länge des dazugehörigen Tages in Stunden. Da sich die jeweilige Tageslänge immer auf ganze Tage bezieht, sollen Werte für t auf ganze Zahlen gerundet werden.</p> <p>Auf das Mitführen der Einheiten wird verzichtet.</p>
5	2.1	Bestimmen Sie mögliche Werte der Parameter a, b, d exakt und c sinnvoll gerundet so, dass die Funktion g die obigen Bedingungen erfüllt.
5	2.2	Berechnen Sie für 2016 die Tage, an denen die Tageslänge in München 12 h betrug.
7	2.3	Berechnen Sie den kürzesten Tag des Jahres 2016 in München.
5	2.4	Berechnen Sie für München den prozentualen Anteil der Tageslicht-Stunden an den Stunden der ersten 100 Tage des Jahres 2016.
70		

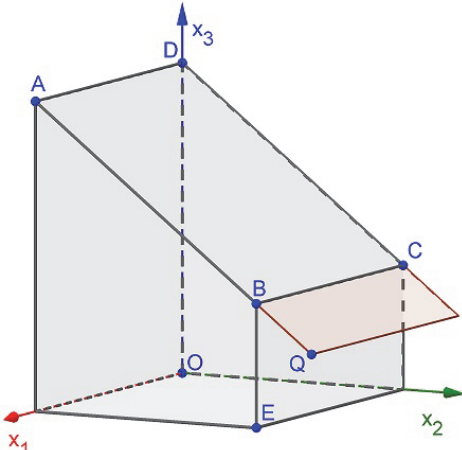
Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und analytische Geometrie

B I

BE	1.0	<p>Im \mathbb{R}^3 sind die folgenden Vektoren gegeben:</p> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c}_p = \begin{pmatrix} p+4 \\ 2p \\ 3-4p \end{pmatrix} \text{ mit } p \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$
4	1.1	Bestimmen Sie den Wert des Parameters p , für den die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c}_p eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.
4	1.2	Drücken Sie den Vektor \vec{d} durch eine Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c}_{-2} (d.h. für $p = -2$) aus.
	2.0	<p>Im \mathbb{R}^3 sind die Geraden g_q und h gegeben:</p> $g_q: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3q-1 \\ 2q \\ q+1 \end{pmatrix} \text{ mit } q, \lambda \in \mathbb{R}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}.$
10	2.1	Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der zwei Geraden g_q und h in Abhängigkeit von q .
	2.2.0	Setzen Sie nun $q = -1$.
4	2.2.1	Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Geraden g_{-1} und h auf eine Nachkommastelle gerundet.
3	2.2.2	Die Geraden g_{-1} und h legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in Normalenform.
5	3	<p>Die Kirchturmspitze eines Dorfes sei der Punkt $K(-2 9 32)$. Ein neugieriger Mensch steuert in dem Dorf eine Drohne entlang einer Geraden durch den Punkt $P(2 0 1,5)$ in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.</p> <p>Bei der Betrachtung wird ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt. Die Koordinaten sind alle in Metern angegeben, auf das Mitführen der Einheit Meter kann bei den Berechnungen verzichtet werden.</p> <p>Berechnen Sie die kürzeste Entfernung der Drohne von der Kirchturmspitze.</p>
30		

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und analytische Geometrie

B II

BE	1.0	<p>Die Abbildung zeigt einen Wintergarten, dessen Boden in der $x_1 - x_2$-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems liegt. Das rechteckige Glasdach ABCD ist von einer Markise bedeckt. Dabei wird der Abstand zwischen Glasdach und Markise vernachlässigt. Die Ebene, in der die Markise liegt, wird mit M bezeichnet. Folgende Punkte des Wintergartens sind gegeben: A(5 0 5), B(5 4 2), D(0 0 5) und E(5 4 0). Alle Koordinaten sind in Metern angegeben. Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.</p>	
4	1.1	<p>Die Markise lässt sich in Verlängerung des Glasdaches über die untere Dachkante [BC] um 1,25 m bis zum Punkt Q (siehe Skizze) ausfahren. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q. [Ergebnis: Q(5 5 1,25)]</p>	
4	1.2	<p>Geben Sie eine Gleichung der Ebene M in Parameterform an und formen Sie diese in eine Koordinatenform um. [Mögliches Teilergebnis: M : $3x_2 + 4x_3 - 20 = 0$]</p>	
4	1.3	<p>Berechnen Sie das Volumen des Wintergartens in m^3.</p>	
6	1.4	<p>Mithilfe zweier Drahtseile, die an den schrägen Dachstreben [AB] und [DC] befestigt werden, soll eine Leuchte im Wintergarten im Punkt U(2,4 1,5 2,8) aufgehängt werden. Ermitteln Sie die Mindestlänge des Drahtseils, das an der Strebe befestigt wird, welche weiter von U entfernt ist. Runden Sie das Ergebnis auf cm.</p>	
	1.5.0	<p>Damit sich der Wintergarten bei Sonnenschein nicht zu stark aufheizt, ist die Markise jetzt bis zum Punkt Q ausgefahren. Die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ -1,4 \end{pmatrix}$ beschrieben.</p>	
4	1.5.1	<p>Ohne Markise verlief der Sonnenstrahl s durch den Punkt E. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade s an und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts T von s mit der Markisebene M. [Ergebnis: T(4 4,8 1,4)]</p>	
2	1.5.2	<p>Erläutern Sie ohne Rechnung, ob der Punkt E bei diesem Sonnenstand im Schatten der ausgefahrenen Markise liegt.</p>	
6	1.6	<p>Im Punkt K(2 0 0) befindet sich eine Lichtquelle. Ihr Strahl wird am Glasdach des Wintergartens im Punkt R(1 2 3,5) reflektiert. Ermitteln Sie durch geeignete Spiegelung eine Gleichung der Geraden, die den reflektierten Lichtstrahl beschreibt.</p>	