Fachabiturprüfung 2017 zum Erwerb der Fachhochschulreife an

Fachoberschulen und Berufsoberschulen

M A T H E M A T I K

mit CAS

Ausbildungsrichtung Technik

Donnerstag, 1. Juni 2017, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A: Analysis

A I

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{(x-2)^2}{1+\frac{1}{4}\cdot x^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion wird mit G_f bezeichnet.
3	1.1	Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Art und Gleichung der Asymptote von G_f an.
3	1.2	Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit seiner Asymptote.
8	1.3	Bestimmen Sie **ohne CAS** die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von G_f. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^2-4}{\left(1+\frac{1}{4}\cdot x^2\right)^2}$]
4	1.4	Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_f.
5	1.5	Geben Sie die Nullstelle von f sowie deren Vielfachheit an und zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von f sowie dessen Asymptote für $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm.
4	1.6	Der Graph G_f besitzt an der Stelle $x = -1$ die Tangente w. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Tangente w und zeichnen Sie den Graphen von w ins Schaubild der Aufgabe 1.5 ein.
5	1.7	Der Graph von f und der Graph von w schließen ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus 1.5 und berechnen Sie die exakte Maßzahl seines Flächeninhaltes A.
	2.0	Gegeben sind nun die reellen Funktionen $f_a: x \mapsto \frac{-4\cdot(a^2-1)\cdot x}{1+\frac{1}{4}\cdot x^2} + 4$ in der vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ unabhängigen Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.
5	2.1	Überprüfen Sie **ohne CAS**, ob die Funktion f aus Aufgabe 1.0 zur Funktionenschar f_a gehört.
5	2.2	Bestimmen Sie alle Werte von a, für welche f_a genau zwei Nullstellen besitzt.
3	2.3	Berechnen Sie sämtliche Werte von a, für die G_{f_a} symmetrisch zur y-Achse ist.
4	2.4	Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die Steigung des Graphen G_{f_a} an der Stelle $x = -1$ einen Extremwert annimmt. Geben Sie außerdem den Wert dieser Steigung an.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	*Fortsetzung A I:*	
	3.0	Zur Gewinnung von Energieholz eignen sich schnell wachsende Pappeln, deren Wachstum über einen Zeitraum von 10 Jahren beobachtet wird. Die Höhe der Pappeln (in Metern) kann näherungsweise durch die Funktion $H: t \mapsto \frac{a \cdot e^{k\cdot(t-2)}}{3+2\cdot e^{k\cdot(t-2)}}$ mit $a, k, t \in \mathbb{R}$ und $a > 0,\ k > 0,\ t \in [0;10]$ beschrieben werden, wobei t die Zeit in Jahren ab dem Beobachtungsbeginn ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Pappel eingepflanzt und hat bereits eine gewisse Höhe. Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn erreicht die Pappel eine Höhe von 8 Metern und in den darauffolgenden 5 Jahren wächst sie um weitere 11,8 Meter. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.
3	3.1	Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und k. Für die folgenden Teilaufgaben gilt a = 40 und k = 1,0.
5	3.2	Berechnen Sie den Höhenzuwachs der Pappel innerhalb der ersten zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn und zeichnen Sie unter Verwendung geeigneter Funktionswerte den Graphen von H für den gesamten Beobachtungszeitraum in ein geeignetes Koordinatensystem.
5	3.3	Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_W für $t \in]0;10[$, an dem die Pappeln am stärksten wachsen.
3	3.4	Aus wirtschaftlichen Gründen werden die Pappeln gefällt, sobald sie von einem Jahr zum nächsten Jahr weniger als 0,35 Meter wachsen würden. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt t_{35} auf ein Jahr gerundet.
5	3.5	Eine langsam wachsende Baumsorte lässt sich modellhaft im gleichen Zeitraum $t \in [0;10]$ durch eine der drei Funktionen mit den Funktionsgleichungen (1), (2) oder (3) mit dem Parameter $b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ beschreiben. Diese langsam wachsende Baumsorte hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die gleiche Höhe (in Metern) wie die Pappel, sie benötigt allerdings doppelt so lange, um auf eine bestimmte Höhe zu wachsen. (1) $L_1(t) = \frac{40 \cdot e^{t-2+b}}{3+2\cdot e^{t-2+b}}$ (2) $L_2(t) = b\cdot\frac{40 \cdot e^{t-2}}{3+2\cdot e^{t-2}}$ (3) $L_3(t) = \frac{40 \cdot e^{b\cdot t-2}}{3+2\cdot e^{b\cdot t-2}}$ Schließen Sie mit geeigneter Argumentation zwei der vorgegebenen Funktionsgleichungen aus. Geben Sie weiterhin den Wert von b für die zutreffende Funktionsgleichung an.
70		

Aufgabengruppe A: Analysis

A II

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \dfrac{6 \cdot e^x}{e^{2x}+1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
3	1.1	Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $\lvert x \rvert \to \infty$. Geben Sie Art und Gleichung der Asymptote des Graphen von f an.
3	1.2	Untersuchen Sie den Graph von f auf Symmetrie zum Koordinatensystem.
8	1.3	Untersuchen Sie **ohne CAS** das Monotonieverhalten der Funktion f und ermitteln Sie damit Koordinaten und Art des Extrempunkts des Graphen von f. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \left(6e^x - 6e^{3x}\right) \cdot \left(e^{2x}+1\right)^{-2}$]
5	1.4	Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f.
4	1.5	Der Graph von f besitzt zwei Wendepunkte W_1 und W_2. Ermitteln Sie die Koordinaten dieser Punkte exakt.
7	1.6	Stellen Sie die Gleichungen der beiden Wendetangenten auf und berechnen Sie den Schnittwinkel φ der beiden Tangenten. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.
5	1.7	Zeichnen Sie unter der Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f sowie mit Farbe seine Asymptote für $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm
	1.8.0	Gegeben sind zudem die reellen Funktionen $h: x \mapsto \dfrac{2 \cdot e^{2x}}{e^{2x}+1}$ und $H: x \mapsto \ln\left(e^{a \cdot x} + b\right)$ mit den Definitionsmengen $D_h = D_H = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.
6	1.8.1	Die Koeffizienten a und b sind dadurch festgelegt, dass der Graph von H die y-Achse im Punkt $T\left(0 \mid \ln(2)\right)$ schneidet und die Tangente an den Graphen von H im Punkt T parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten verläuft. Berechnen Sie mithilfe dieser Angaben **ohne CAS** die Koeffizienten a und b. Zeigen Sie danach, dass die Funktion H eine Stammfunktion der Funktion h in D_H ist. [Teilergebnis: $a = 2$; $b = 1$]
7	1.8.2	Der Graph von h und die x-Achse schließen mit den senkrechten Geraden mit den Gleichungen $x = x_S$ und $x = u$ mit $u \in \mathbb{R}$ und $u > x_S$ im 1. Quadranten ein Flächenstück ein. Dabei ist x_S die Schnittstelle der Graphen von f und h. Berechnen Sie die Maßzahl A(u) des Flächeninhalts in Abhängigkeit von u. Bestimmen Sie anschließend den Wert von u so, dass die Flächenmaßzahl A(u) den Wert 42 annimmt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE | *Fortsetzung A II:*

2.0 Unter der Tageslänge versteht man die Dauer von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang. Sie ist von der geographischen Breite des Ortes abhängig. Es wurden die Tageslängen in München im Jahr 2016 (Schaltjahr mit 366 Tagen) aufgezeichnet. Die maximale Tageslänge betrug 16,12 h, die minimale Tageslänge 8,40 h. Die Tageslänge am 1.1.2016 (0. Tag) betrug 8,46 h (Wert geringfügig verändert).

Die Funktion $g: t \mapsto a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$ mit $a, b, c, d, t \in \mathbb{R} \wedge t \in [0;366[$ wird nun modellhaft zur Darstellung der Aufzeichnungen verwendet. t beschreibt dabei die Anzahl der vergangenen Tage ab Beginn des 1.1.2016 und der Funktionswert g(t) die Länge des dazugehörigen Tages in Stunden. Da sich die jeweilige Tageslänge immer auf ganze Tage bezieht, sollen Werte für t auf ganze Zahlen gerundet werden.
Auf das Mitführen der Einheiten wird verzichtet.

5 | 2.1 Bestimmen Sie mögliche Werte der Parameter a, b, d exakt und c sinnvoll gerundet so, dass die Funktion g die obigen Bedingungen erfüllt.

3 | 2.2 Berechnen Sie für 2016 die Tage, an denen die Tageslänge in München 12 h betrug.

7 | 2.3 Berechnen Sie **ohne CAS** den kürzesten Tag des Jahres 2016 in München.

7 | 2.4 Berechnen Sie für München
a) den prozentualen Anteil der Tageslicht-Stunden an den gesamten Stunden der ersten 100 Tage des Jahres 2016.

Berechnen Sie außerdem die Werte für t, an denen im Jahr 2016 in München
b) genauso viele Tag- wie Nachtstunden vergangen sind und
c) die Hälfte der gesamten Tagesstunden vergangen sind.

70

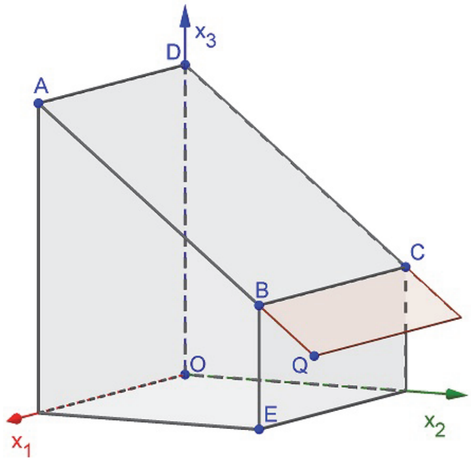
Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und analytische Geometrie

B I

BE		
	1.0	Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Vektoren gegeben: $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{c_p}=\begin{pmatrix}p+4\\2p\\3-4p\end{pmatrix}$ mit $p\in\mathbb{R}$ und $\vec{d}=\begin{pmatrix}-5\\2\\-3\end{pmatrix}$.
5	1.1	Bestimmen Sie den Wert des Parameters p, für den die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\overrightarrow{c_p}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Zeigen Sie, dass der Vektor $\overrightarrow{c_p}$ für keinen Wert von p parallel zum Vektor $\vec{d}$ sein kann.
3	1.2	Drücken Sie den Vektor $\vec{d}$ durch eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\overrightarrow{c_{-2}}$ (d.h. für $p=-2$) aus.
	2.0	Im $\mathbb{R}^3$ sind die Geraden g_q und h gegeben: $g_q: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\q\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3q-1\\2q\\q+1\end{pmatrix}$ mit $q, \lambda\in\mathbb{R}$; $\quad h: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ mit $\mu\in\mathbb{R}$.
10	2.1	Untersuchen Sie **ohne CAS** die gegenseitige Lage der zwei Geraden g_q und h in Abhängigkeit von q.
	2.2.0	Setzen Sie nun $q=-1$.
3	2.2.1	Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Geraden g_{-1} und h auf eine Nachkommastelle gerundet.
3	2.2.2	Die Geraden g_{-1} und h legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in Normalenform.
6	3	Die Kirchturmspitze eines Dorfes sei der Punkt $K(-2\mid 9\mid 32)$. Ein neugieriger Mensch steuert in dem Dorf eine Drohne entlang einer Geraden durch den Punkt $P(2\mid 0\mid 1{,}5)$ in Richtung des Vektors $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}$. Bei der Betrachtung wird ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt, wobei der Erdboden sich in der x_1-x_2-Ebene befindet. Die Koordinaten sind alle in Metern angegeben, auf das Mitführen der Einheit Meter kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Berechnen Sie die kürzeste Entfernung der Drohne von der Kirchturmspitze sowie die Höhe über dem Erdboden, in der sie sich dabei befindet.
30		

Aufgabengruppe B : Lineare Algebra und analytische Geometrie

B II

BE		
	1.0	Die Abbildung zeigt einen Wintergarten, dessen Boden in der x_1-x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems liegt. Das rechteckige Glasdach ABCD ist von einer Markise bedeckt. Dabei wird der Abstand zwischen Glasdach und Markise vernachlässigt. Die Ebene, in der die Markise liegt, wird mit M bezeichnet. Folgende Punkte des Wintergartens sind gegeben: $A(5\|0\|5)$, $B(5\|4\|2)$, $D(0\|0\|5)$ und $E(5\|4\|0)$. Alle Koordinaten sind in Metern angegeben. Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden. 
4	1.1	Die Markise lässt sich in Verlängerung des Glasdaches über die untere Dachkante $[BC]$ um 1,25 m bis zum Punkt Q (siehe Skizze) ausfahren. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q. [Ergebnis: $Q(5\|5\|1{,}25)$]
4	1.2	Geben Sie eine Gleichung der Ebene M in Parameterform an und formen Sie diese in eine Koordinatenform um. [Mögliches Teilergebnis: $M: 3x_2+4x_3-20=0$]
4	1.3	Berechnen Sie das Volumen des Wintergartens in m^3.
6	1.4	Mithilfe zweier Drahtseile, die an den schrägen Dachstreben $[AB]$ und $[DC]$ befestigt werden, soll eine Leuchte im Wintergarten im Punkt $U(2{,}4\|1{,}5\|2{,}8)$ aufgehängt werden. Ermitteln Sie die Mindestlänge des Drahtseils, das an der Strebe befestigt wird, welche weiter von U entfernt ist. Runden Sie das Ergebnis auf cm.
	1.5.0	Damit sich der Wintergarten bei Sonnenschein nicht zu stark aufheizt, ist die Markise jetzt bis zum Punkt Q ausgefahren. Die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-0{,}8\\-1{,}4\end{pmatrix}$ beschrieben.
4	1.5.1	Ohne Markise verliefe der Sonnenstrahl s durch den Punkt E. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade s an und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts T von s mit der Markisenebene M. [Ergebnis: $T(4\|4{,}8\|1{,}4)$]
2	1.5.2	Erläutern Sie ohne Rechnung, ob der Punkt E bei diesem Sonnenstand im Schatten der ausgefahrenen Markise liegt.
6	1.6	Im Punkt $K(2\|0\|0)$ befindet sich eine Lichtquelle. Ihr Strahl wird am Glasdach des Wintergartens im Punkt $R(1\|2\|3{,}5)$ reflektiert. Ermitteln Sie durch geeignete Spiegelung eine Gleichung der Geraden, die den reflektierten Lichtstrahl beschreibt.
30		