ABITURPRÜFUNG 2017 ZUM ERWERB DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE AN FACHOBERSCHULEN UND BERUFSOBERSCHULEN

MATHEMATIK

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Donnerstag, 1. Juni 2017, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;
die Auswahl trifft die Schule

AI

1.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{2(x+1)^2}{x^2-1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$.

1.1 Geben Sie D_g an, prüfen Sie g auf Nullstellen und folgern Sie daraus die Art der Definitionslücken. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung an die Definitionslücken. (7 BE)

1.2.0 Die Funktion $f: x \mapsto \frac{2(x+1)}{x-1}$ mit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ ist die stetige Fortsetzung der Funktion g (Nachweis nicht erforderlich). Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.2.1 Geben Sie Art und Gleichungen aller Asymptoten von G_f an und untersuchen Sie, ob sich der Graph der Funktion f für $x \to +\infty$ der Asymptote von oben oder unten nähert. (5 BE)

1.2.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f und geben Sie die Wertemenge von f an.

[mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -\frac{4}{(x-1)^2}$] (4 BE)

1.2.3 Zeichnen Sie G_f und seine Asymptoten unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse für $-4 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)

1.2.4 Der Graph G_f, die y-Achse und die Geraden $y = 2$ und $x = a$ mit dem reellen Parameter $a < -1$ begrenzen ein Flächenstück A.
Kennzeichnen Sie diese Fläche für $a = -3$ im Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.2.3 und berechnen Sie deren Flächenmaßzahl A(a) in Abhängigkeit von a.
[mögliches Ergebnis: $A(a) = 4\ln(1-a)$] (5 BE)

1.2.5 Untersuchen Sie, ob A(a) für $a \to -\infty$ einen endlichen Wert annimmt. (2 BE)

1.2.6 Die Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion f. Geben Sie nur mit den bisherigen Ergebnissen die maximalen Monotonieintervalle des Graphen der Funktion F für $x < 1$ an. (3 BE)

2.0 Die Funktion n beschreibt näherungsweise die zeitliche Entwicklung der Einwohnerzahl einer fränkischen Kleinstadt. Es gilt hierfür die Funktionsgleichung
$n(t) = b(-e^{-0{,}05t} + e^{-0{,}25t} + 1{,}5)$ mit $t \ge 0,\ b \in \mathbb{R}$.
Der Zeitpunkt $t = 0$ wird auf den 1.1.1995 festgelegt. Dabei gibt n die Einwohnerzahl in Tausend und t die Zeit in Jahren an. Auf Einheiten soll bei den Rechnungen verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse sinnvoll.

2.1 Am 1.1.1999 hatte die Stadt 20983 Einwohner. Bestimmen Sie damit den Wert des Parameters b.

[Ergebnis: $b \approx 20$] (2 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung A I

2.2 Berechnen Sie Art und Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion n und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang.

[mögliches Teilergebnis: $\dot{n}(t) = e^{-0,05t} - 5e^{-0,25t}$] (7 BE)

2.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion n in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 BE)

2.4 Zum 1.1.2010 konnte die Stadt Fördergelder beantragen. Diese richteten sich nach der durchschnittlichen Einwohnerzahl der Stadt während der vergangenen 15 Jahre. Ermitteln Sie die Höhe der Fördermittel, wenn es pro durchschnittlichem Einwohner 500 € an Fördergeldern gab, indem Sie zunächst das Integral $I = \int_0^{15} n(t)dt$ berechnen.

[Teilergebnis: $I \approx 317$] (5 BE)

3.0 Die subjektive Empfindung der Tonhöhe Z des menschlichen Gehörs in Abhängigkeit von der Frequenz x in Hertz (Hz) kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$Z(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 < x \leq 427 \\ 1127 \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{700}\right) - 110 & \text{für} \quad 427 < x \leq 19000 \end{cases}$$

Die Einheit der Tonhöhe Z ist $1\,\text{mel}$. Runden Sie die Ergebnisse auf ganze Zahlen. Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden.

3.1 Zeigen Sie, dass die Funktion Z an der Nahtstelle x = 427 - im Rahmen der Rundungsgenauigkeit - stetig und differenzierbar ist. (5 BE)

3.2 Berechnen Sie die Frequenz x, bei der die Tonhöhe von 1400 mel empfunden wird. (3 BE)

3.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion Z im Bereich $0 < x \leq 2200$.
(Maßstab: waagrechte Achse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 200$ Hz
senkrechte Achse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 200$ mel) (4 BE)

A II

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x^3}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Geben Sie D_f und die Art der Definitionslücke von f an und bestimmen Sie die Nullstelle von f. (3 BE)

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern von D_f und geben Sie Art und Gleichungen aller Asymptoten von G_f an. (5 BE)

1.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-4x-3}{x^4}$] (7 BE)

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und mittels geeigneter zusätzlicher Funktionswerte G_f für $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (5 BE)

1.5 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm f(x) auch durch $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ darstellen lässt und bestimmen Sie eine Stammfunktion F der Funktion f mit $D_F = D_f$. (3 BE)

1.6 Der Graph G_f, die Geraden $x = 1,\ x = b\ (b > 1)$ und die x-Achse schließen ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück für b = 4 im Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.4. Zeigen Sie, dass sich für die Maßzahl des Flächeninhalts $A(b) = -\frac{2}{b} - \frac{0,5}{b^2} + 2,5$ ergibt. Bestimmen Sie den Grenzwert von A(b) für $b \to \infty$. (6 BE)

2.0 Zum Ende des Jahres 1995 (Zeitpunkt t = 0) lebten laut der Organisation der Vereinten Nationen (UNO) 5,74 Milliarden Menschen auf der Erde. Ende 2016 hatte die Erdbevölkerung gegenüber t = 0 um 29,1% zugenommen. Mit der vereinfachenden Annahme einer exponentiellen Entwicklung gilt für die Gesamtzahl N der Weltbevölkerung in Milliarden in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren die Gleichung $N(t) = a \cdot e^{bt}$ mit $t \ge 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

2.1 Bestimmen Sie aus den obigen Angaben die Parameter a und b.
[Ergebnisse: $a = 5,74;\ b \approx 0,01216$] (4 BE)

2.2 Berechnen Sie, wie viele Menschen zum Ende des Jahres 2005 nach dem Modell von 2.0 auf der Erde lebten.

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung A II

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der tatsächlichen Weltbevölkerung Ende 2005 von 6,52 Milliarden (UNO), indem Sie die prozentuale Abweichung berechnen und bewerten Sie damit die Güte des Modells.
Geben Sie außerdem stichpunktartig drei Gründe an, die eine genaue Ermittlung der weltweiten Bevölkerungszahl erschweren. (6 BE)

2.3 Ermitteln Sie, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung voraussichtlich im Jahr 2017 zunehmen wird. (2 BE)

2.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion $\dot{N}$ und berechnen Sie $\dot{N}(21)$. Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang und vergleichen Sie ihn mit Ihrem Ergebnis der Teilaufgabe 2.3. (4 BE)

2.5 Bestimmen Sie das Jahr, in dem sich die Weltbevölkerung gegenüber dem 31.12.1995 nach dem Modell von 2.0 verdoppelt haben wird. (3 BE)

2.6 Berechnen Sie, welche Bevölkerungszahl sich am Ende des Jahres 2052 ergeben würde, wenn man - in einem anderen Szenario - ab Ende des Jahres 2016 von einer linearen Zunahme um 90 Mio. pro Jahr ausgeht. (3 BE)

3.0 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto \frac{x^2}{4\ln(2x+4)}$, ihre Ableitungsfunktion k' und die Funktion $h: x \mapsto \frac{1}{k(x)}$ jeweils in ihren maximalen reellen Definitionsmengen.

3.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Funktion k gilt: $D_k = \left]-2; \infty\right[\setminus \{-1{,}5\}$. (3 BE)

3.2 Ordnen Sie jedem Graphen der Bilder a, b und c einer der Funktionen k, k' oder h zu und begründen Sie Ihre Wahl. (4 BE)

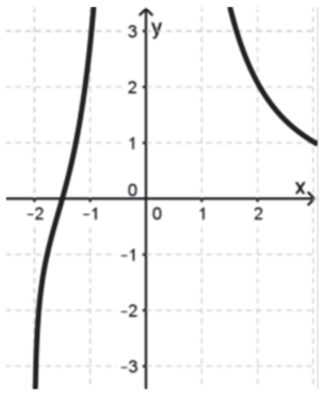


Bild a

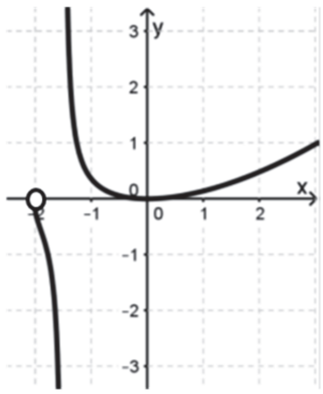


Bild b

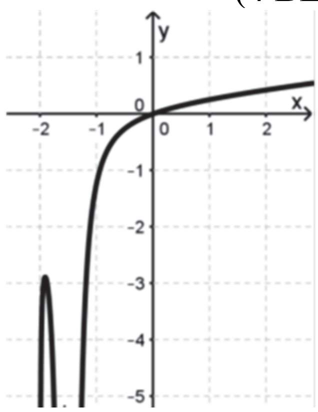


Bild c

3.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von k(x) für $x \to \infty$. (2 BE)

B I

1.0 Im IR^3 sind der Punkt $P(2|\ 6|\ -8)$, die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und die Ebenen E_a: $2ax_1 + ax_2 - x_3 = 4a$ mit $a, \mu \in IR$ gegeben.

1.1 Geben Sie für a = 0 die besondere Lage der Ebene E_0 im Koordinatensystem an. Der Punkt P' ist der an E_0 gespiegelte Punkt P. Geben Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes P' an. (3 BE)

1.2 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E_a und der Geraden g in Abhängigkeit von a. (5 BE)

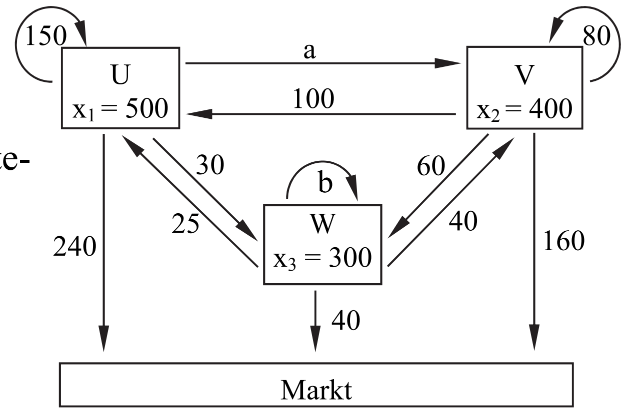
1.3 Die Ebene F enthält den Punkt P und die Gerade g. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von F. (5 BE)
[Mögliches Ergebnis: F: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = -6$]

1.4 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E_a und F in Abhängigkeit von a. (5 BE)

1.5 Bestimmen Sie für a = 1 die Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E_1 und F. (4 BE)

1.6 Fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze mit E_1, F, g und s an. Verwenden Sie dazu kein Koordinatensystem. (3 BE)

2.0 Die drei Zweigwerke U, V und W eines Unternehmens sind nach dem Leontief-Modell miteinander und mit dem Markt wie im nebenstehenden Diagramm dargestellt verflochten. Alle Werte sind in Mengeneinheiten ME angegeben mit $a, b \in IR^+$.



2.1 Bestimmen Sie a, b und die Inputmatrix A. (4 BE)

2.2 Die Produktionskosten pro ME betragen im Zweigwerk U 75,– €, in V 80,– € und in W 95,– €. Der Erlös pro ME auf dem Markt beträgt für die Produkte von Zweigwerk U 215,– €, von V 240,– € und von W 170,– €. Berechnen Sie den Gesamtgewinn G und erläutern Sie, wie die Geschäftsleitung auf dieses Ergebnis reagieren könnte.
(Hinweis: Gesamtgewinn = Gesamterlös – Gesamtkosten) (4 BE)

2.3 Aufgrund einer technologischen Umstellung soll das Zweigwerk V genau 600 ME und U höchstens 580 ME produzieren. Untersuchen Sie, ob die Produktionen der Zweigwerke U und W so festgelegt werden können, dass dann alle drei Werke gleich viel an den Markt abgeben. (7 BE)

B II

1.0 Im IR^3 sind die Punkte A(2| 2| 2), P(2| –3| 5) und die Ebene

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r, s \in IR \text{ gegeben.}$$

1.1 Zeigen Sie, dass die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Ebene E zusammen mit dem Vektor $\overrightarrow{AP}$ eine Basis des IR^3 bilden.
Begründen Sie, dass der Punkt P nicht Element der Ebene E ist. (5 BE)

1.2 Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E und geben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem an. (3 BE)

1.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F: $x_1 + x_3 = 0$. (3 BE)

1.4 Zeigen Sie, dass $A \notin s$ gilt. Entscheiden Sie ohne weitere Rechnung, wie die Schnittgerade s zur Geraden AP liegt. Fertigen Sie hierzu eine aussagekräftige Skizze an. (4 BE)

1.5 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geradenschar

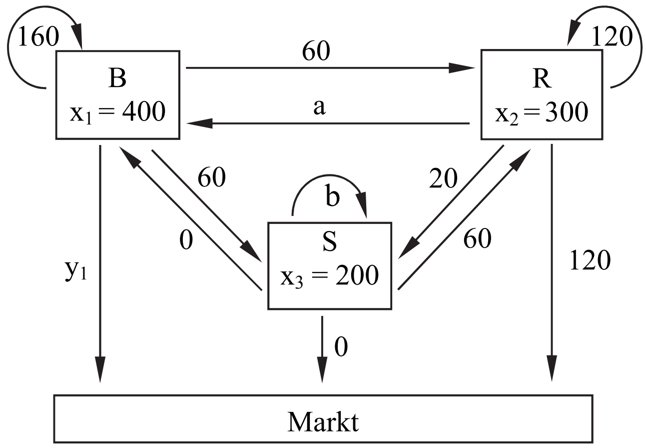
$$g_a:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2a \end{pmatrix} \text{ mit } a, \mu \in IR \text{ und der Ebene E in Abhängigkeit}$$

von a. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung von B II

2.0 Drei konventionelle landwirtschaftliche Betriebe B, R und S sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief – Modell verflochten. Das Diagramm stellt die momentane Verflechtung der Betriebe in Mengeneinheiten ME dar mit $a, b, y_1 \in \mathbb{R}^+$.



2.1 Bestimmen Sie a, b und y_1 und geben Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang an. Berechnen Sie die Inputmatrix A. (6 BE)

2.2 In der nächsten Produktionsperiode wird erwartet, dass die Nachfrage von Produkten der Betriebe B auf 82 ME und R auf 84 ME sinkt. Betrieb S soll 10 ME an den Markt liefern.
Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor. Nennen Sie die Ursache dafür, dass trotz des Absinkens der Produktion in allen drei Betrieben die Marktabgabe in einem Betrieb steigt. (7 BE)

2.3 Die Betriebe entschließen sich mittelfristig auf biologische Betriebsführung umzustellen. Für die Umstellungszeit ergibt sich die neue Inputmatrix

$$A^* = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 2 - 0{,}004t & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}02(t-8) & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $t \in [16; 22]$ ein technologieabhängiger Parameter.

Berechnen Sie, für welchen Wert von t die Summe der Marktabgaben aller drei Betriebe am größten ist, wenn der Produktionsvektor $\vec{x} = (40t \quad 10t \quad 12t)^T$ geplant ist.

Hinweis: Es kann davon ausgegangen werden, dass die Marktabgaben der drei Betriebe für $t \in [16; 22]$ nicht negativ sind. (8 BE)