ABITURPRÜFUNG 2017 AN BERUFSOBERSCHULEN

UND FACHOBERSCHULEN

ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

Donnerstag, den 1. Juni 2017, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten; die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A

A I

1 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto \frac{50}{1+e^{-ax-1}}$ mit $a \in IR\backslash\{0\}$ und der Definitionsmenge D = IR.

1.1 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a sowie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ an den Rändern von D jeweils in Abhängigkeit von a. (7 BE)

(Teilergebnis: $f_a'(x) = \frac{50a \cdot e^{-ax-1}}{(1+e^{-ax-1})^2}$)

1.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f_{-1} und zeigen Sie, dass der Graph von f_{-1} symmetrisch zu diesem Wendepunkt verläuft. (9 BE)

(Teilergebnis: $x_W = 1$)

1.3 Begründen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = f_{-1}(x)$ und $D_g=[\,0\,;\,\infty\,[$ umkehrbar ist. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion g^{-1}. Ermitteln Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von g^{-1} im Punkt $Q(12{,}5 \mid y_Q)$ ohne den Term der Umkehrfunktion zu bestimmen. (8 BE)

1.4 Gegeben ist die Integralfunktion F_a durch $F_a(x) = \int_0^x f_a(t)\,dt$ mit $a<0$ und der Definitionsmenge D = IR.

1.4.1 Geben Sie ohne die Integration durchzuführen die Anzahl und Lage der Nullstellen sowie eventuelle Extremstellen des Graphen von F_a an. Begründen Sie Ihre Ergebnisse. (4 BE)

1.4.2 Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von $F_a(x)$ und ermitteln Sie den Grenzwert von $F_a(x)$ für $x \to +\infty$. (10 BE)

(mögliches Teilergebnis: $F_a(x) = \frac{50}{a} \ln(\frac{1+e^{ax+1}}{1+e})$)

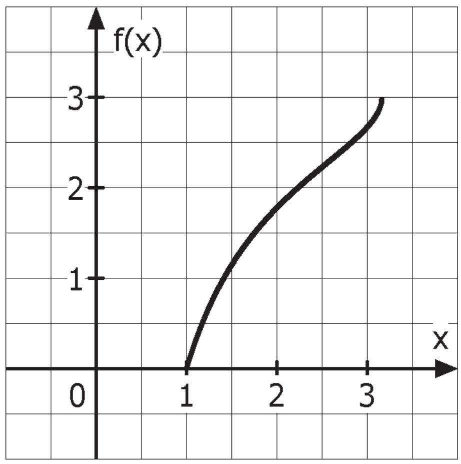
2 Gegeben ist die Differenzialgleichung $y' + \frac{x+2}{x+1} \cdot y = \frac{2 \cdot \sin(x)}{x+1}$ mit $x>-1$.

2.1 Bestimmen Sie mit der Methode der Variation der Konstanten die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung. (mögliches Ergebnis: $y(x) = (\sin(x)-\cos(x)+ D\cdot e^{-x})\cdot(x+1)^{-1}$) (10 BE)

2.2 Bestimmen Sie die spezielle Lösung für $y(0)=0$ und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte dieser speziellen Lösung für $x \to \infty$. (4 BE)

3 Für die maschinelle Herstellung von Pralinen wird eine Gussform gebaut. Die Gussform entsteht als rotationssymmetrischer Körper, der durch Rotation des Graphen der Funktion $f : x \mapsto \frac{3x-\sqrt{10-x^2}}{x}$, $x \in [1\,;\,\sqrt{10}\,]$ um die y-Achse entsteht, wobei x in cm gemessen wird. Auf eine Mitführung der Einheiten wird verzichtet.

Berechnen Sie das Volumen V(b) einer Praline, wenn die Gussform von den Geraden mit den Gleichungen y=0 und y=b begrenzt wird, sowie V(3) auf zwei Nachkommastellen genau. (8 BE)



A II

1 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(ax))^2}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und der maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subseteq \mathbb{R}$.

1.1 Zeigen Sie, dass gilt: $D_{f_a} = \mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{e}{a}\}$. Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a(x)$ an den Rändern von D_{f_a} und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a an. (9 BE)

1.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von f_a sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a.
(Teilergebnis: $f_a'(x) = \frac{1+\ln(ax)}{x^2 \cdot (1-\ln(ax))^3}$) (10 BE)

1.3 Der Graph von f_a hat genau eine Tangente t_a, die durch den Ursprung verläuft. Ermitteln Sie die Koordinaten des zugehörigen Berührpunktes B_a und die Gleichung der Tangente t_a in Abhängigkeit von a.
(Teilergebnis: $x_{B_a} = \frac{1}{a}$) (8 BE)

Für die folgenden Teilaufgaben gilt a=1.

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f_1 im Bereich $0<x\leq 8$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem (1LE = 1cm). Tragen Sie auch die zugehörigen Asymptoten und die Tangente t_1 aus 1.3 ein. (5 BE)

1.5 Der Graph von f_1, die Gerade mit der Gleichung x=1 und die Koordinatenachsen schließen im I. Quadranten eine Fläche ein, die sich nach oben ins Unendliche erstreckt. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche. (6 BE)

1.6 Gegeben ist nun die Funktion $g : x \mapsto \arctan(f_1(x))$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$. Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von g sowie das Verhalten der Funktionswerte g(x) an den Rändern von D_g. (5 BE)

2 Gegeben ist weiter die Funktion $h : x \mapsto \frac{4\sqrt{x}}{x^2 + 3}$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}_0^+$.

2.1 Ermitteln Sie die Nullstelle von h und das Verhalten von h(x) für $x \to +\infty$. (3 BE)

2.2 Der Graph von h, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung x=3 schließen eine Fläche A ein. Bei der Rotation der Fläche A um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers. (5 BE)

3 Gegeben ist die Differenzialgleichung $y' \cdot \sin(x) + y \cdot \cos(x) = (x^2 + 2) \cdot \sin(x)$ mit $x \in]\,0\,;\,\pi\,[$.
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mit der Methode der Variation der Konstanten. (9 BE)

Aufgabengruppe B
B I

1 Am Timmendorfer Strand findet alljährlich im Juni eine Segelregatta statt. Erfahrungsgemäß kommen 23% der Besucher aus dem Ausland, jeder neunte Besucher segelt selbst regelmäßig in seiner Freizeit. Verwenden Sie für die folgenden Berechnungen die Normalverteilung als Näherung.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit der folgender Ereignisse:
E_1: „Von 200 befragten Besuchern segeln mindestens 20 selbst in ihrer Freizeit."
E_2: „Von 200 befragten Besuchern kommen genau fünfzig aus dem Ausland". (7 BE)

2 Die Windstärke wird in Beaufort (Bft) gemessen. Sie reicht von absoluter Windstille (0 Bft) bis hin zur Orkanstärke (12 Bft). Im Bereich der Windstärken von 1 bis 4 einschließlich zeigen sich auf dem Wasser nur kleine Wellen.
In der folgenden Tabelle steht die Zufallsgröße X für die Windstärke in Bft mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit für das Auftreten am Timmendorfer Strand im Juni ($a, b \in \mathbb{R}$):

x in Bft	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	a	2a	b²	$\frac{1}{3}b$	0,12	0,15	7a	0,12	0,09	3a	2a	a	0,01

Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b für den Fall, dass der Wind im Juni mit 35% Wahrscheinlichkeit kleine Wellen auf dem Wasser erzeugt. Bestimmen Sie weiterhin, mit welcher Windstärke im Mittel zu rechnen ist. (Teilergebnis: a = 0,02) (7 BE)

3 Für die Regatta benötigt der Veranstalter 250 langfristig intakte Bojen. Bei den Bojen treten jedoch im Laufe der Zeit durch Materialfehler Schäden auf, verursacht durch hohen Wellengang bzw. durch UV-Strahlung.

3.1 Nach Angaben des Herstellers erleiden 5% der Bojen nach einer gewissen Einsatzzeit einen Wellenschaden, 40% von diesen Bojen sind zudem anfällig gegenüber dauerhafter UV-Strahlung. 90% aller Bojen sind sowohl gegenüber hohen Wellen als auch dauerhafter UV-Strahlung unempfindlich, also langfristig intakt. Bestimmen Sie den Anteil der gegenüber UV-Strahlung empfindlichen Bojen unter denen, die gegenüber großen Wellen unempfindlich sind. (6 BE)

3.2 Ermitteln Sie, wie viele Bojen der Veranstalter mindestens bereit halten muss, damit mit mehr als 99% Wahrscheinlichkeit mindestens 250 langfristig intakte Bojen zur Verfügung stehen, wenn 90% aller Bojen langfristig intakt sind. (8 BE)

3.3 Vor einem Regattawochenende mit erwartetem hohen Wellengang vermutet der Veranstalter, dass sich der Anteil der Bojen mit Schäden durch hohe Wellen erhöht hat. Der Hersteller jedoch beharrt weiterhin darauf, dieser Anteil liege immer noch bei 5% (Nullhypothese). Zur Sicherheit wurden 350 Bojen bestellt und getestet. Legen Sie für einen Signifikanztest mit einem Signifikanzniveau von 5% die Testgröße fest, geben Sie die Gegenhypothese an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (7 BE)

4 An der Regatta nehmen insgesamt 64 Segelschiffe teil, davon fünf aus Dänemark. In einem Einzelrennen segeln immer vier Schiffe gegeneinander. Die beiden Erstplatzierten kommen jeweils eine Runde weiter, die beiden anderen scheiden aus.

4.1 Ermitteln Sie, wie viele Einzelrennen notwendig sind, bevor in einem letzten Einzelrennen die letzten vier verbliebenen Segelschiffe die ersten vier Plätze aussegeln. (2 BE)

4.2 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit vier der fünf dänischen Schiffe in der ersten Runde aufeinander treffen, wenn die Teilnehmer ausgelost werden. (3 BE)

Die Wahrscheinlichkeit, an einer belebten Straße in einer Stadt ein Auto zu beobachten, dessen Fahrer ein Mobiltelefon am Ohr hat, ist p.

1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p bei 12 kontrollierten Autos die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

A: „Nur das vierte und das siebte Auto wird von einem Fahrer gelenkt, der ein Mobiltelefon am Ohr hat."

B: „Die ersten fünf Autos werden von einem Fahrer gelenkt, der kein Mobiltelefon am Ohr hat, aber unter den 12 Fahrern sind genau zwei mit einem Mobiltelefon am Ohr." (5 BE)

2 Ermitteln Sie, wie groß p mindestens sein muss, wenn bei 12 kontrollierten Autos mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Fahrer erwischt wird, der ein Mobiltelefon am Ohr hat. (5 BE)

In den Teilaufgaben 3 bis 5 ist p=0,2.

3 Bei einer Kontrolle werden so lange vorbeifahrende Autos beobachtet, bis eines entdeckt wird, dessen Fahrer ein Mobiltelefon am Ohr hat, höchstens aber 15 Autos. Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der bei diesem Vorgang kontrollierten Autos an.

3.1 Bestimmen Sie P(Y=8) und P(Y=15). (3 BE)

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mindestens 7 Autos überprüfen muss. (2 BE)

4 Es werden 300 vorbeifahrende Autos beobachtet. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Fahrer an, die ein Mobiltelefon am Ohr haben. Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Bereich symmetrisch um den Erwartungswert von X, in dem die Zahl der Fahrer mit Mobiltelefon am Ohr mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit liegt. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (7 BE)

5 Ermitteln Sie, wie viele Autos mindestens beobachtet werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens 70 Fahrer mit Mobiltelefon am Ohr zu erwischen. (8 BE)

6 Die Polizei will die Kontrollen verstärken, wenn in ihrer Stadt die Wahrscheinlichkeit für einen Fahrer mit Mobiltelefon am Ohr mehr als 20% beträgt (Gegenhypothese). Dies soll durch eine Kontrolle von 500 vorbeifahrenden Autos mit einem Signifikanztest getestet werden. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.

6.1 Legen Sie für einen Signifikanztest mit einem Signifikanzniveau von 5% die Testgröße fest, geben Sie die Nullhypothese an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. (7 BE)

6.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Fahrer mit Mobiltelefon am Ohr 25% beträgt und die Nullhypothese ab 116 Fahrern mit Mobiltelefon am Ohr abgelehnt wird. (3 BE)