Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2017

Prüfungsfach:	**Mathematik** **(nichttechnische Ausbildungsrichtungen)**
Prüfungstag:	**Donnerstag, 22. Juni 2017**
Prüfungsdauer:	**9:00 Uhr – 12:00 Uhr**
Hilfsmittel:	**Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner;** **Merkhilfe Mathematik (Technik)**
Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule. Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.

Bewertungsschlüssel:

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

Aufgabe I

		BE
1.0	Die Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Der Graph G_f der Funktion f berührt die x-Achse an der Stelle $x_B = 2$ und hat im Punkt $W(1\|\frac{1}{2})$ einen Wendepunkt.	
1.1	Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. [mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 + 4)$]	5
1.2	Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie den Funktionsterm vollständig faktorisiert mithilfe von Linearfaktoren an.	4
1.3	Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von f.	4
1.4	Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte für $-2 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$.	4
1.5	Die Gerade G_g schneidet den Graphen G_f im Wendepunkt W und verläuft durch den Punkt $N(-1\|0)$. Stellen Sie die Gleichung der Geraden G_g auf und zeichnen Sie die Gerade G_g in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1.4 ein.	3
1.6	Der Graph G_f und die Gerade G_g schließen für $-1 \leq x \leq 1$ ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Aufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl A des Flächeninhaltes dieses Flächenstücks.	5
		25

Aufgabe II

BE

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion g durch ihren Term $g(x)=\frac{1}{9}x^4-2x^2+9$ mit $D_g=\mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

2.1 Untersuchen Sie, ob G_g achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. 2

2.2 Ermitteln Sie die Nullstellen von g und deren jeweilige Vielfachheit. 4

2.3 Bestimmen Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_g. 4

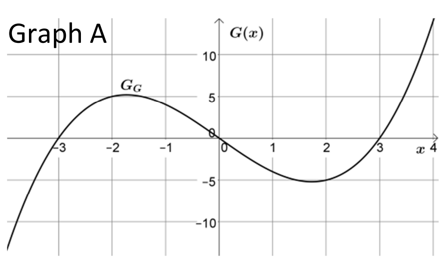
2.4 Zeichnen Sie G_g unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte für $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$. 4

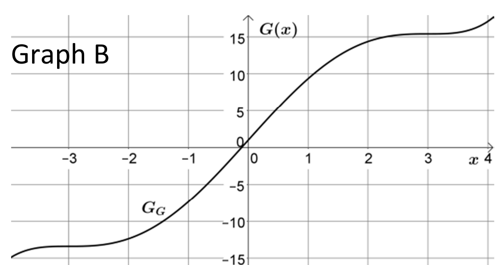
2.5 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion p. Diese Parabel ist symmetrisch zur y-Achse, schneidet die x-Achse im Punkt $N(3|0)$ und die Ordinate ihres Scheitelpunktes hat den Wert $y_s=-3$. 4
Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$ und zeichnen Sie die Parabel im Bereich $-4 \le x \le 4$ in das unter Teilaufgabe 2.4 erstellte Koordinatensystem ein.

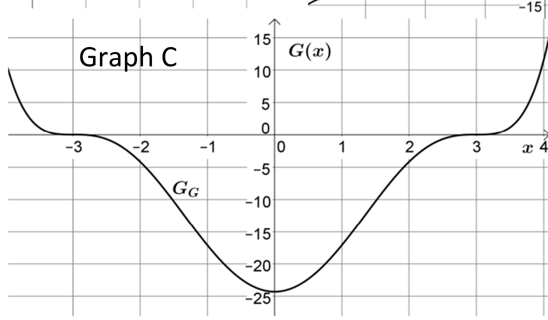
[mögliches Ergebnis: $p(x)=\frac{1}{3}x^2-3$]

2.6 Die Graphen G_g und G_p schließen drei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie für das Flächenstück mit dem größten Flächeninhalt die Maßzahl seines Flächeninhalts. Runden Sie Ihr Ergebnis auf eine Nachkommastelle. 4

2.7 Entscheiden Sie, welche der drei Abbildungen den Graph einer Stammfunktion der Funktion g zeigt. Geben Sie eine Begründung für Ihre Entscheidung an. 3





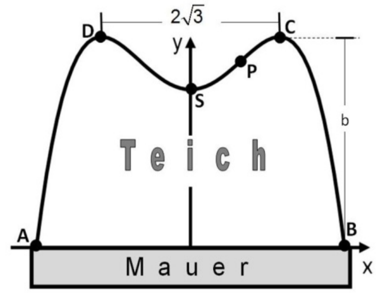


25

Aufgabe III

BE

3.0 In einem Garten soll direkt an eine Mauer angrenzend ein Teich errichtet werden, der bezüglich einer zu dieser Mauer senkrechten Achse symmetrisch ist (wie in der nebenstehenden Skizze dargestellt).
Im festgelegten Koordinatensystem hat der Punkt S die Koordinaten $S(0|3)$. Die Koordinaten sind als Längen in der Einheit Meter aufzufassen.



S hat also den Abstand 3 Meter von der Mauer und liegt auf der Symmetrieachse.
Die Teichpumpe wird im Punkt $P(1|\frac{32}{9})$ installiert.
Die Einheiten können bei allen Berechnungen weggelassen werden.

3.1 Mithilfe einer Computersoftware wird ein Modell des Teichs erstellt. Die Teichumrandung (ohne Strecke $[AB]$) wird dabei durch eine ganzrationale Funktion t vom Grad 4 beschrieben. So beträgt in diesem Modell unter anderem der Abstand der beiden Punkte C und D $2\sqrt{3}$ Meter.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $t(x)$ der Modellfunktion t.
[mögliches Ergebnis: $t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 3$] 6

3.2 Berechnen Sie die maximale horizontale Breite $\overline{AB}$ des Teichs und die maximale Ausdehnung b des Teichs in y-Richtung. 5

3.3 Im Punkt S wird ein Stromanschluss für die Teichpumpe angebracht. Berechnen Sie die Mindestlänge des Stromkabels, um die Pumpe an die Steckdose in S anzuschließen. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. 2

3.4 Der Teich soll bei randvoller Befüllung ein Wasservolumen von 10 000 Litern enthalten.
Berechnen Sie, welche durchschnittliche Wassertiefe w der Teich dazu haben muss.
[Ergebnis: $w \approx 0{,}52\,\text{m}$] 6

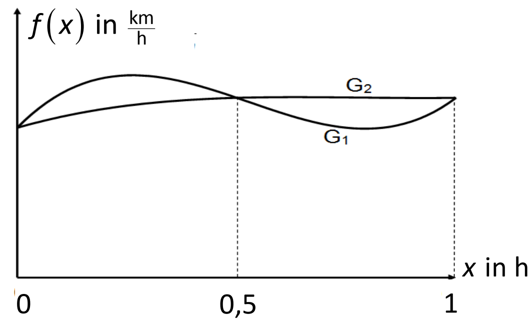
3.5 Der Garteneigentümer könnte sich auch eine trapezförmige Teichbegrenzung vorstellen, indem er die Punkte A, B, C und D zu einem Trapez verbindet. Die durchschnittliche Wassertiefe w soll unverändert bleiben.
Berechnen Sie die prozentuale Änderung der im vollständig befüllten Teich befindlichen Wassermenge, wenn statt der ursprünglichen Begrenzung nun die trapezförmige Teichbegrenzung realisiert würde. 6

25

Aufgabe IV

BE

4.0 Die Leistungssportler Adam und Bernhard treten zu einem einstündigen Trainingslauf für ihren nächsten Marathonwettkampf an. Nach der Einlaufphase wird eine Stunde lang die Geschwindigkeit der Läufer von ihren Sportuhren aufgezeichnet. Nebenstehendes Diagramm zeigt die Laufgeschwindigkeiten von Adam (G_1) und Bernhard (G_2). Die Geschwindigkeit von Adam wird dabei durch die Funktion f mit dem Term $f(x)=72x^3-114x^2+45x+15$ beschrieben. Dabei bezeichnet x die Zeit nach Aufzeichnungsbeginn in der Einheit Stunde und $f(x)$ die momentane Geschwindigkeit von Adam in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Zum Zeitpunkt $x=0$ befinden sich beide Läufer am gleichen Ort. Die Einheiten sollen in den folgenden Rechnungen nicht mitgeführt werden.



4.1 Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich von f an und zeigen Sie, dass der Läufer Adam 5 Minuten nach dem Start die Geschwindigkeit $18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht hat. 3

4.2 Berechnen Sie, zu welchen weiteren Zeitpunkten der Läufer Adam ebenfalls genau die Laufgeschwindigkeit $18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hat und geben Sie mithilfe der obigen Abbildung alle Zeiten an, zu denen Adam mit einer Geschwindigkeit von mehr als $18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ läuft. 7

4.3 Der von Adam nach einer Stunde Lauf zurückgelegte Weg s in km lässt sich wie folgt berechnen: $s=\int_0^1 f(x)\,dx$. Berechnen Sie den von Adam zurückgelegten Weg s. 4

4.4 Adam läuft in der einstündigen Trainingseinheit 17,5 Kilometer weit. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt demnach $17{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ermitteln Sie die Laufzeit für die komplette Marathondistanz von 42,195 Kilometer, wenn Adam den gesamten Marathonlauf mit dieser Durchschnittsgeschwindigkeit laufen würde. Geben Sie die Laufzeit auf die Minute genau an. 2

4.5 Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt (auf die Minute genau) Adam seine maximale Geschwindigkeit während des Trainingslaufs erreicht. 6

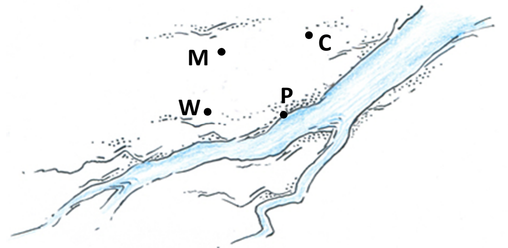
4.6 Die Graphen G_1 und G_2 schließen zwei endliche Flächenstücke ein, die den gleichen Flächeninhalt besitzen. Ein Nachweis dafür ist nicht erforderlich. 3
Nennen Sie von den folgenden Aussagen diejenigen, welche wahr sind.
1. Adam und Bernhard sind nach 60 Minuten gleich weit gelaufen.
2. Adam und Bernhard sind nach 30 Minuten gleich weit gelaufen.
3. Bernhard überholt während des Laufs den Läufer Adam.
4. Nach 30 Minuten befindet sich Adam vor Bernhard.
5. Nach 45 Minuten befindet sich Bernhard vor Adam.
6. Nach 30 Minuten hat Adam den größten Vorsprung vor Bernhard.

25

Aufgabe V

BE

5.0 Eine Goldgräberfamilie möchte in Alaska auf einem kleinen Claim Gold schürfen und plant den Ankauf eines entsprechenden ebenen Grundstücks. Die Familie legt eine handschriftliche (nicht maßstabsgetreue) Landkarte an. Diese ist nebenstehend abgebildet. Mithilfe eines festgelegten Koordinatensystems können bestimmte Orte in der Landkarte eindeutig lokalisiert werden. Die Mine befindet sich im Punkt $M(20|30|11)$. Die Waschanlage $W(25|35|10)$ wird mit Wasser aus einer Pumpe im Punkt $P(20|40|9)$ versorgt, die sich an einem nahe gelegenen Fluss befindet.
Die x_1-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems ist nach Süden orientiert, die x_2-Achse ist nach Osten orientiert. Die Koordinaten x_1, x_2 und x_3 sind als Vielfaches der Längeneinheit 10 Meter zu interpretieren.



5.1 Zeigen Sie, dass die Waschanlage W von der Mine M und der Pumpe P gleich weit entfernt ist. 4

5.2 Das Camp C, in dem sich die Unterkunft der Goldgräberfamilie befinden wird, soll so errichtet werden, dass das sich dann ergebende Viereck MWPC eine Raute bildet. Berechnen Sie die Koordinaten des Camps. 3
[Ergebnis: $C(15|35|10)$]

5.3 Camp, Mine, Waschanlage und Pumpe werden mit geraden Wegen verbunden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Kreuzungspunktes K der Wege von C zu W und M zu P. 2
[Ergebnis: $K(20|35|10)$]

5.4 Die Goldgräberfamilie kauft dieses durch die Eckpunkte MWPC begrenzte, rautenförmige Grundstück und muss für den Quadratmeter Grund 40 US-$ bezahlen. Ermitteln Sie den Kaufpreis dieses Grundstücks. 5

5.5 Nennen Sie, in welcher Himmelsrichtung sich die Waschanlage von der Mine aus gesehen befindet. 2

5.6 Begründen Sie, weshalb das Flusswasser vom Ort P aus ohne Pumpe nicht zur Waschanlage gelangen kann. 2

5.7 Von der Mine aus wird eine Probebohrung in Bohrrichtung $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ durchgeführt. 4
Nach einer Bohrlänge von 62,5 Metern stößt die Familie auf goldhaltiges Gestein. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Fundort F die Koordinaten $(20|35|7{,}25)$ besitzt.

5.8 Finden Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse heraus, ob sich der Fundort unterhalb des gekauften Grundstücks befindet und damit das Gold Eigentum der Goldgräberfamilie ist. 3

25