

Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife 2017

Prüfungsfach: **Mathematik
(technische Ausbildungsrichtung)**

Prüfungstag: **Donnerstag, 22. Juni 2017**

Prüfungsdauer: **9:00 Uhr – 12:00 Uhr**

Hilfsmittel: **Elektronischer, nicht programmierbarer
Taschenrechner;
Merkhilfe Mathematik (Technik)**

Hinweise: Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei
Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen
Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.

Bewertungsschlüssel:

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

Aufgabe I

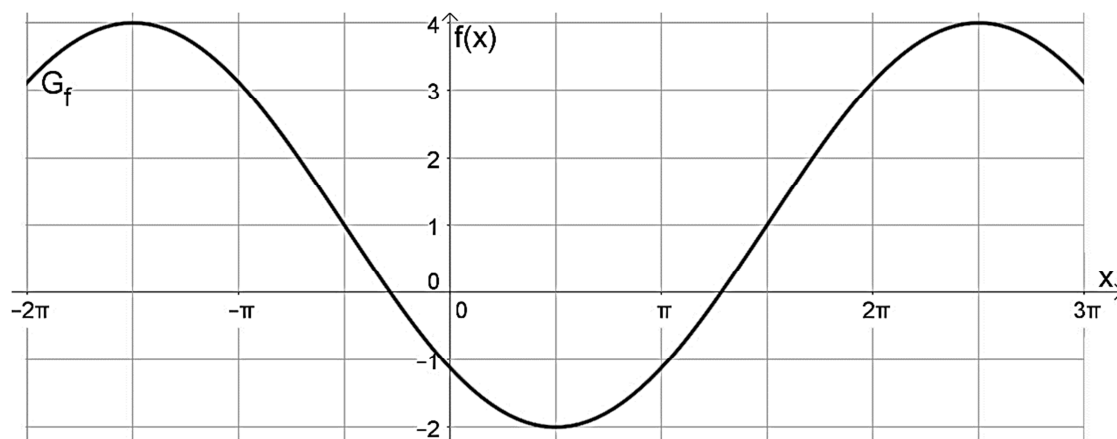
BE

- 1.0** Gegeben ist die reelle Funktion f durch ihren Term $f(x) = \frac{0,25x^2 - 2x - 3}{0,5x + 2}$ auf der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_f .
- 1.1** Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_f und die Nullstellen von f . 3
- 1.2** Ermitteln Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten von G_f und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Asymptoten. 5
[Teilergebnis: $f(x) = 0,5x - 6 + \frac{9}{0,5x + 2}$]
- 1.3** Berechnen Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f . 5
[mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{0,125x^2 + x - 2,5}{(0,5x + 2)^2}$]
- 1.4** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f an der Stelle $x_T = -1$. 4
- 1.5** Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-4 \leq x \leq 14$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie dabei auch alle bisherigen relevanten Ergebnisse. 5
Zeichnen Sie außerdem die beiden Asymptoten und die Tangente aus den vorangegangenen Teilaufgaben mit in das Koordinatensystem ein.
- 1.6** Ermitteln Sie die Terme aller Stammfunktionen von f . 3

Aufgabe II

BE

- 2.0** In der nachfolgenden Abbildung ist der Graph G_f der Funktion f abgebildet. Der Term der Funktion f lautet: $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Die Definitionsmenge von f ist mit $D_f = [-2\pi; 3\pi]$ gegeben.

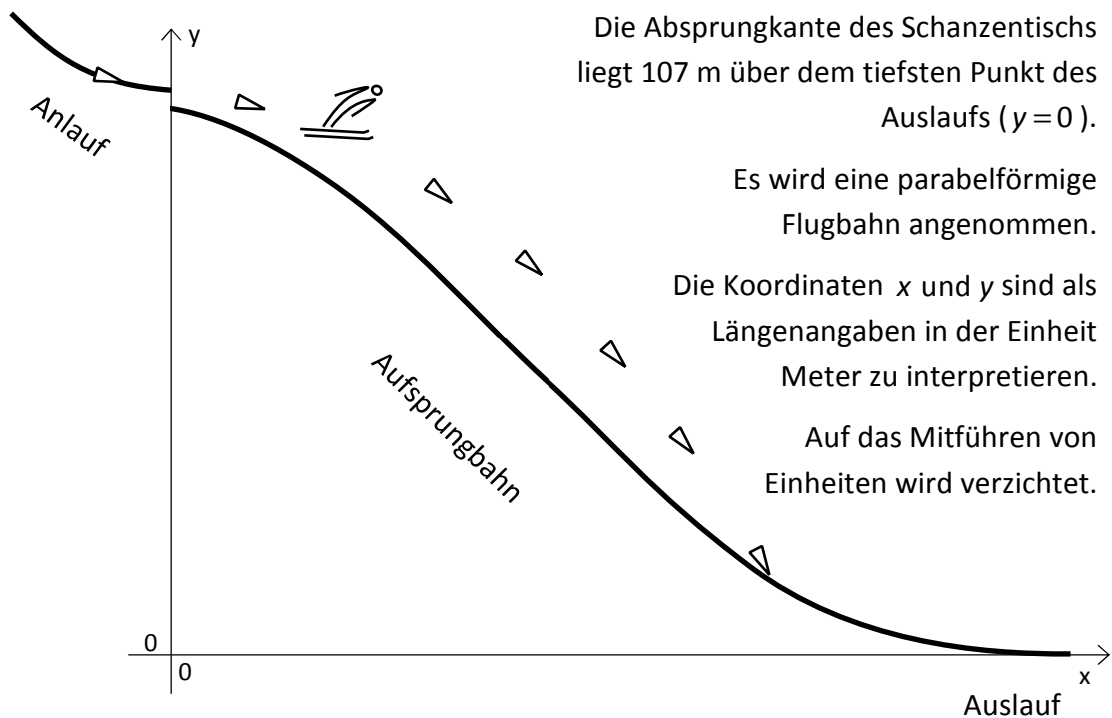


- 2.1** Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die Werte der Parameter a , b , c und d . 5
- 2.2.0** Gegeben ist nun die reelle Funktion h durch ihren Term $h(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\pi\right)$ auf der Definitionsmenge $D_h = [-2\pi; 3\pi]$.
- 2.2.1** Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion h . 3
- 2.2.2** Bestimmen Sie die Periodenlänge von h . 2
- 2.2.3** Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_h . 6
- 2.2.4** Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_h . 4
- 2.2.5** Der Graph G_h und die x -Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl A des Flächeninhaltes dieses Flächenstücks. 5

Aufgabe III

BE

- 3.0** Eine Skisprungschanze besteht aus einem Anlauf, der mit dem Schanzentisch endet, und der Aufsprungbahn, auf der die Skispringer wieder den Boden berühren.



- 3.1** Eine Kamera filmt den Sprung eines Skispringers. Zwei Schnappschüsse während des Sprungs zeigen den Springer in den Punkten $(9|105)$ und $(18|101)$ im festgelegten Koordinatensystem (siehe Abbildung). Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Flugparabel.
[mögliches Ergebnis: $y = -\frac{1}{81}x^2 - \frac{1}{9}x + 107$]
- 3.2** Das Profil der Aufsprungbahn wird beschrieben durch die Funktion g mit dem Term $g(x) = \frac{1}{12500}x^3 - \frac{9}{625}x^2 - \frac{137}{500}x + 103$ für $0 \leq x \leq 125$.
Der kritische Punkt (K-Punkt) der Schanze ist derjenige Punkt, in dem die Krümmung der Aufsprungbahn wechselt. Bestimmen Sie die Koordinaten des K-Punktes und den spitzen Neigungswinkel der Aufsprungbahn gegenüber der Horizontalen im K-Punkt.
- 3.3** Bei $x_R = 60$ steht ein Weitenrichter an der Aufsprungbahn. Erläutern Sie, ob der Springer aus Teilaufgabe 3.1 links vom Weitenrichter, genau bei ihm oder rechts von ihm auf der Aufsprungbahn aufsetzt.

Aufgabe III Fortsetzung

BE

- 3.4 Die Flugbahn eines Skispringers, der exakt horizontal den Schanzentisch verlässt, ist durch den Graphen der Funktion f mit dem zugehörigen Funktionsterm $f(x) = -\frac{1}{91}x^2 + 107$ gegeben.

4

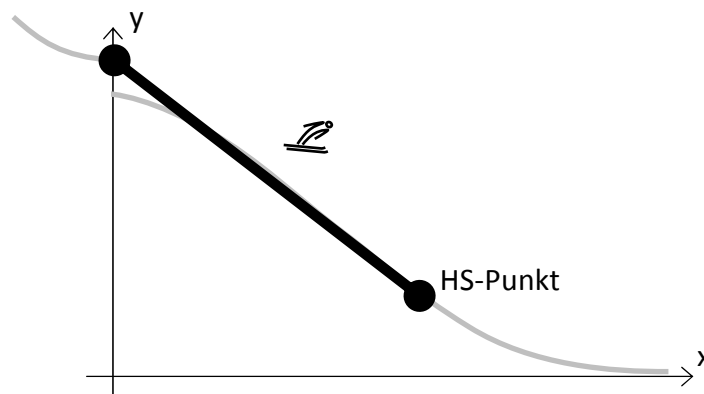
Zeigen Sie, dass die Differenzfunktion d mit $d(x) = f(x) - g(x)$ zwischen $x_1 = 87$ und $x_2 = 89$ mindestens eine Nullstelle besitzt, und interpretieren Sie diese Tatsache im Sachzusammenhang.

- 3.5 Um die Größe von Sprungschanzen vergleichen zu können, wurde vom internationalen Skiverband die *HillSize* eingeführt.

5

Der *HillSize*-Punkt (HS-Punkt) ist derjenige Punkt des Profils der Aufsprungbahn, in dem die Aufsprungbahn einen spitzen Neigungswinkel von 32° gegenüber der Horizontalen besitzt. Die *HillSize* ist die Länge der Strecke zwischen dem Absprungpunkt am Schanzentisch und dem HS-Punkt.

Berechnen Sie die Koordinaten des HS-Punkts sowie die HillSize s der vorliegenden Schanze.



- 3.6 Um die relative Flughöhe der Springer über der Aufsprungbahn und damit die mögliche Verletzungsgefahr bei Abstürzen zu verringern, soll das bestehende Profil der Aufsprungbahn innerhalb der ersten 60 Meter in horizontaler Richtung ab Schanzentisch verändert werden.

4

Das neu geplante Profil wird durch den Funktionsterm

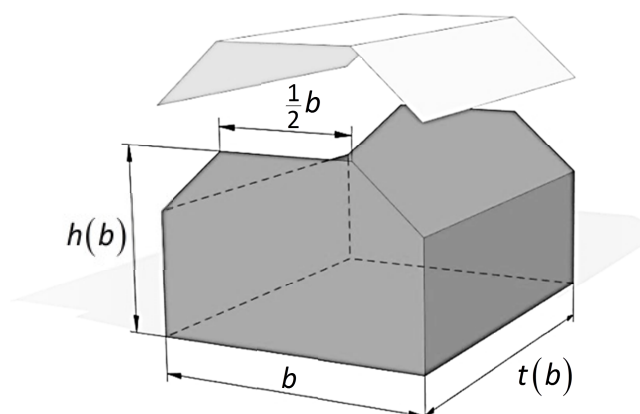
$$g_{\text{neu}}(x) = \frac{1}{12500}x^3 - \frac{106}{5625}x^2 - \frac{11}{1500}x + 103 \text{ mit } 0 < x \leq 60 \text{ beschrieben.}$$

Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Materials, das insgesamt zu diesem Zweck auf die bestehende Aufsprungbahn aufgeschüttet werden muss, wenn die Aufsprungbahn eine mittlere Breite von 12 Meter aufweist.

Aufgabe IV

BE

- 4.0 Ein Unternehmen bekommt den Auftrag, Werkzeugkisten in der unten abgebildeten Form herzustellen. Eine solche symmetrische und mit einem Deckel verschließbare Kiste soll folgende Kundenwünsche erfüllen:
- Die **verschlossene** Werkzeugkiste hat ein Volumen von 22 dm^3 .
 - Die Breite b darf 10 dm nicht überschreiten.
 - Das Verhältnis zwischen Höhe h und Breite b der Box beträgt $2:3$.
 - Die Schräge beginnt auf $\frac{2}{3}$ der Gesamthöhe, sodass die dadurch entstehende Oberkante genau halb so lang ist wie die Grundbreite b .



(vereinfachte Darstellung der Werkzeugkiste)

Die Wandstärke der Werkzeugkiste ist **vorerst** zu vernachlässigen. Sämtliche Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen gerundet anzugeben. Auf das Mitführen von Maßeinheiten soll in allen Teilaufgaben verzichtet werden.

- 4.1 Bestimmen Sie mithilfe des vorgegebenen Volumens der verschlossenen Kiste den Term einer Funktion t , mit der sich die Tiefe $t(b)$ in Abhängigkeit der Breite b der Kiste berechnen lässt. Geben Sie die Definitionsmenge D_t der Funktion t an.

[mögliches Teilergebnis: $t(b) = \frac{36}{b^2}$]

- 4.2.0 Im Folgenden wird ausschließlich die **offene** Werkzeugkiste betrachtet.

- 4.2.1 Stellen Sie die Maßzahl A_{ges} der gesamten äußeren Oberfläche aller Seitenwände und des Bodens der Werkzeugkiste in Abhängigkeit von der Breite b dar.

[mögliches Ergebnis: $A_{\text{ges}}(b) = \frac{11}{9}b^2 + \frac{68}{b}$]

- 4.2.2 Berechnen Sie die Kantenlängen b , $h(b)$ und $t(b)$ der Werkzeugkiste so, dass die gesamte äußere Oberfläche aller Seitenwände und des Bodens der Kiste möglichst klein ist und geben Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes dieser kleinsten Oberfläche an.

Aufgabe IV Fortsetzung**BE**

4.2.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion A_{ges} im Definitionsbereich $D_{A_{\text{ges}}}$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie hierzu einen geeigneten Maßstab.

5

4.2.4 Nun gilt für die **Wandstärke** der Kiste: $d = 0,02 \text{ dm}$.

4

Die Werkzeugkiste wird aus Polyethylen PE-HD (Dichte $\rho = 0,96 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$) gefertigt.

(Hinweis: Die Dichte ρ eines Stoffes ist das Verhältnis zwischen Masse m und Volumen V eines Stoffes $\rho = \frac{m}{V}$.)

Um die Herstellungskosten möglichst gering zu halten, werden nur Werkzeugkisten mit minimaler Oberfläche (vgl. 4.2.2) produziert.

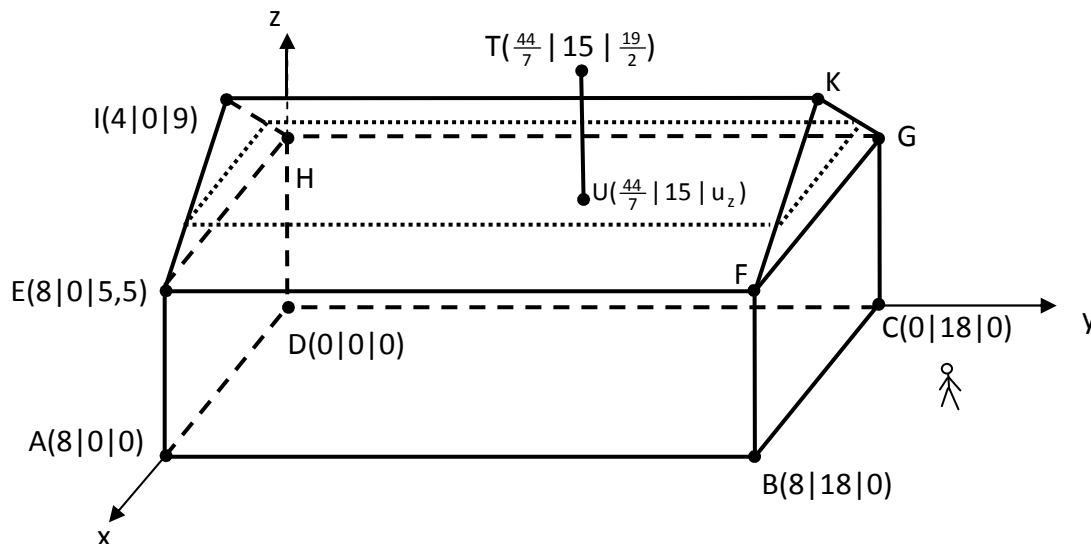
Berechnen Sie die Masse einer solchen Werkzeugkiste sowie die Gesamtmasse in Tonnen des verwendeten PE-HD bei der Herstellung von 25 000 Werkzeugkisten.

(Hinweis: Als vereinfachte Berechnungsformel für das Volumen des benötigten Polyethylen soll $V_{\text{PE-HD}} \approx A_{\text{ges}} \cdot d$ verwendet werden.)

Aufgabe V

BE

- 5.0** Eine Scheune ist in ihren Abmessungen durch die Punkte A bis K (vgl. Zeichnung) definiert. Auf der Scheune befindet sich ein Mast für eine Oberleitung zur Stromversorgung. Dieser verläuft parallel zur z-Achse und schneidet die in der Zeichnung dem Betrachter zugewandten Dachfläche im Punkt U. Die Spitze des Mastes ist durch den Punkt T festgelegt.
- Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität. Auf die Mitführung von Einheiten während der Berechnung wird verzichtet.



- 5.1** Die vordere Dachfläche mit den Eckpunkten E, F, K und I legt die Ebene E_2 fest, die hintere Dachfläche mit den Eckpunkten G, H, I und K legt die Ebene E_1 fest. Bestimmen Sie die Gleichungen der Ebenen E_1 und E_2 jeweils in der Normalenform.

[mögliches Teilergebnis: $E_2: \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 50 = 0$]

- 5.2** Berechnen Sie das Maß des Winkels, den die beiden Dachflächen miteinander einschließen.
- 5.3** Um weitere Waren zu lagern, wird im Dachbereich ein neuer Zwischenboden eingezogen (gepunktet in der Skizze dargestellt). Dabei wird das Dach (als Dach wird derjenige Teil der Scheune definiert, der über der Ebene EFGH liegt) in zwei gleich große Teilvolumina zerlegt. Der senkrechte Abstand vom Firstbalken $[IK]$ zum Zwischenboden wird mit h_1 bezeichnet und beträgt $h_1 = \frac{7}{\sqrt{8}}$ m. Der neu eingezogene Zwischenboden soll möglichst vollständig mit Holzbrettern ausgelegt werden (es werden keine Bretter zerteilt). Berechnen Sie die benötigte Anzahl der Holzbretter, wenn ein Brett die Maße 3 m x 0,35 m hat. Vernachlässigen Sie die praktisch vorkommenden Fugenabstände zwischen den Brettern.
- 5.4** Der Punkt U mit den Koordinaten $U(\frac{44}{7} | 15 | u_z)$ liegt in der Ebene E_2 . Berechnen Sie die fehlende Koordinate u_z .

Aufgabe V Fortsetzung

BE

5.5

Die Sonne scheint aus Richtung $\vec{s} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{7} \\ -6 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5

Berechnen Sie die Länge des Schattens, den der Mast auf die Dachfläche E_2 wirft.

5.6

Die Oberleitung, die am Mast befestigt ist, hängt aufgrund des Eigengewichtes der Stromleitung durch (siehe Skizze). Im Winter kann es aufgrund anhaftenden Eises zu einem noch größeren Durchhängen kommen. Daher wird aus Sicherheitsgründen ein Mindestabstand der Oberleitung zum Dach verlangt.

7

Berechnen Sie die kürzeste Entfernung der Stromleitung vom Firstbalken $[IK]$ für die hier gegebene Situation.

Vereinfacht wird angenommen, dass die Stromleitung im Bereich des Daches als

Gerade anzusehen ist, die den Aufhängepunkt T und den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ besitzt.

