Mathematik

Abiturprüfung 2018

Prüfungsteil A (CAS)

Arbeitszeit: 90 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

4 **1** Geben Sie für die Funktionen f_1 und f_2 jeweils die maximale Definitionsmenge und die Nullstelle an.

$$f_1 : x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-4} \qquad\qquad f_2 : x \mapsto \ln(x+2)$$

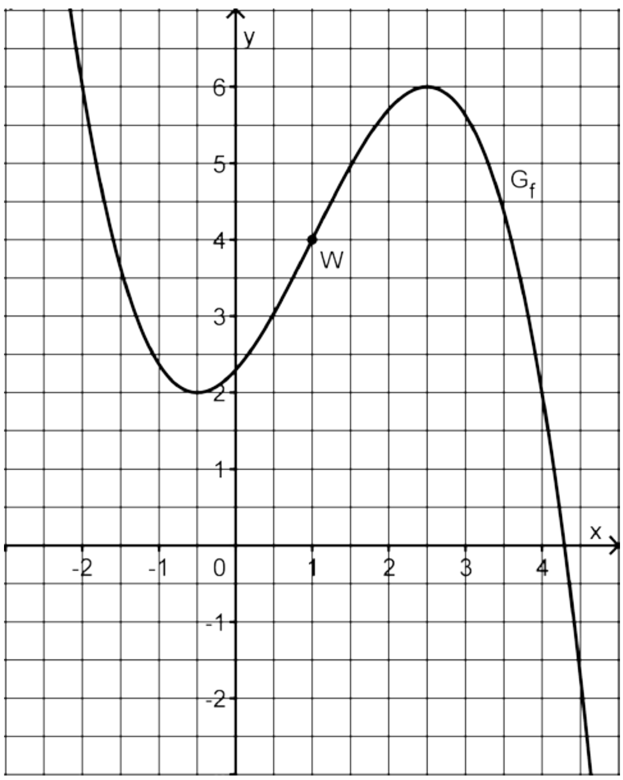
3 **2** Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, deren Graph im Punkt $(2\,|\,1)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt hat.

5 **3** Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$.
Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.
(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A(5\,|\,f(5))$ die x-Achse als Tangente.
(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B(-1\,|\,f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden.

3 **4** Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit dem Wendepunkt $W(1\,|\,4)$.

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise den Wert der Ableitung von f an der Stelle $x = 1$.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' von f in die Abbildung; berücksichtigen Sie dabei insbesondere die Lage der Nullstellen von f' sowie den für $f'(1)$ ermittelten Näherungswert.



(Fortsetzung nächste Seite)

5 Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

2 **a)** Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

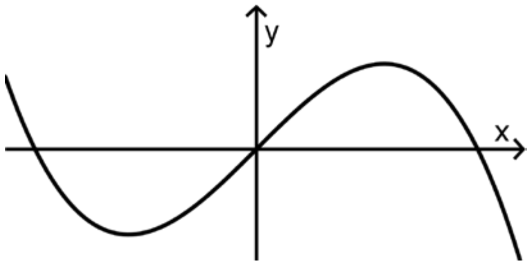


Abb. 1

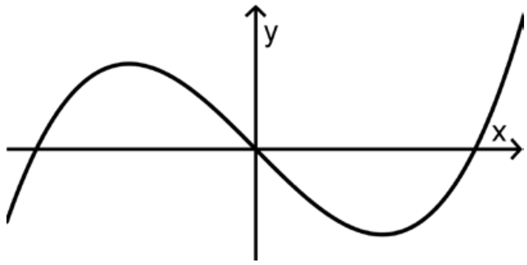


Abb. 2

3 **b)** Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

6 **1** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{3x-5}$ mit maximalem Definitionsbereich D. Geben Sie D an und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\left(3 \,|\, f(3)\right)$.

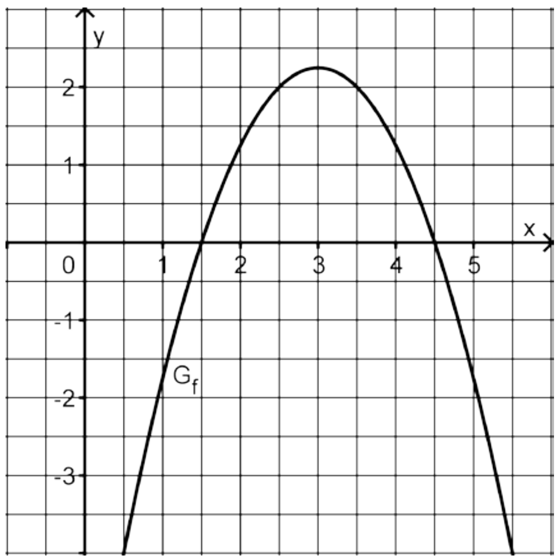
5 **2** Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$. Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:

(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.

(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A\left(5 \,|\, f(5)\right)$ die x-Achse als Tangente.

(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B\left(-1 \,|\, f(-1)\right)$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden.

4 **3** Die Abbildung zeigt eine nach unten geöffnete Parabel, die zu einer Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ gehört. Der Scheitel der Parabel hat die x-Koordinate 3.



Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F: x \mapsto \int_3^x f(t)\,dt$.

Wie viele Nullstellen hat F? Machen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung plausibel.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

2 **a)** Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

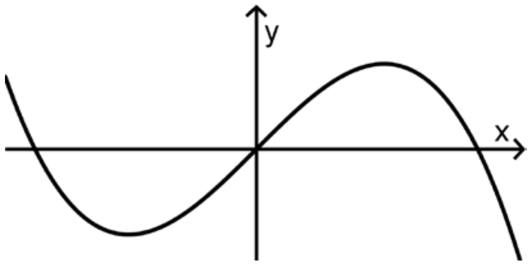


Abb. 1

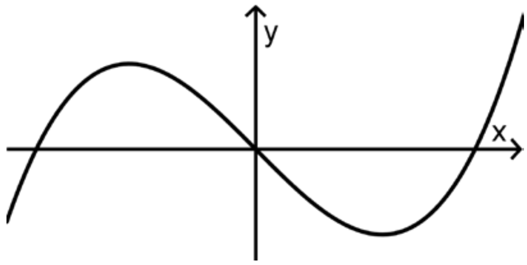


Abb. 2

3 **b)** Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

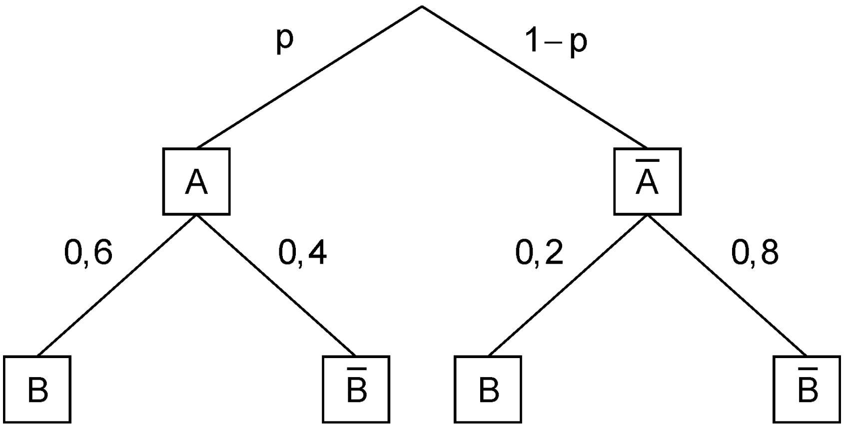
BE

1 In Sonnenstadt gibt es 6000 Einfamilienhäuser, von denen 2400 mit einer Holzpelletheizung ausgestattet sind. Bei zwei Dritteln der Einfamilienhäuser mit Holzpelletheizung ist diese mit einer solarthermischen Anlage kombiniert. 50 % aller Einfamilienhäuser sind weder mit einer Holzpelletheizung noch mit einer solarthermischen Anlage ausgestattet.

3 **a)** Stellen Sie zu der beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf.

2 **b)** Ein zufällig ausgewähltes Einfamilienhaus ist mit einer solarthermischen Anlage ausgestattet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es eine Holzpelletheizung?

2 Das abgebildete Baumdiagramm stellt ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B sowie deren Gegenereignissen $\overline{A}$ und $\overline{B}$ dar.



2 **a)** Bestimmen Sie den Wert von p so, dass das Ereignis B bei diesem Zufallsexperiment mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 eintritt.

3 **b)** Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert, den die Wahrscheinlichkeit von B annehmen kann.

10

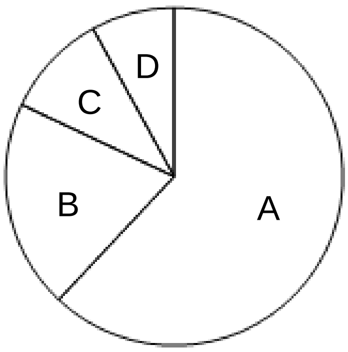
Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Anlässlich einer Studie wurden 300 weibliche und 700 männliche Bewohner einer Großstadt im Alter von 18 bis 30 Jahren dazu befragt, ob sie Interesse an Car-Sharing haben. 20 % der Befragten waren weiblich und gaben an, nicht interessiert zu sein. 8 % der Befragten waren männlich und gaben an, Interesse an Car-Sharing zu haben. Das Kreisdiagramm veranschaulicht die absoluten Häufigkeiten, die sich bei der Befragung ergaben.



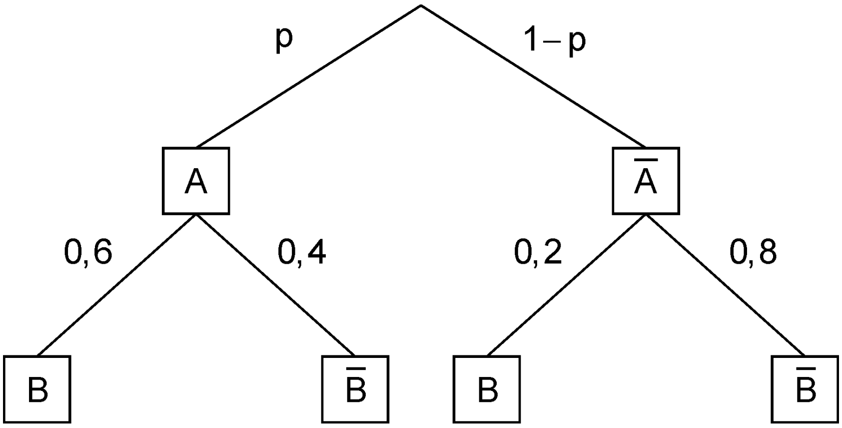
1 Frauen mit Interesse an Car-Sharing
2 Frauen ohne Interesse an Car-Sharing
3 Männer mit Interesse an Car-Sharing
4 Männer ohne Interesse an Car-Sharing

4 **a)** Ordnen Sie die Beschriftungen 1 bis 4 den Sektoren A bis D korrekt zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

1 **b)** Berechnen Sie die Größe des Mittelpunktswinkels desjenigen Sektors, der den Anteil der Befragten veranschaulicht, die männlich waren und angaben, Interesse an Car-Sharing zu haben.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Das abgebildete Baumdiagramm stellt ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B sowie deren Gegenereignissen $\overline{A}$ und $\overline{B}$ dar.



2 **a)** Bestimmen Sie den Wert von p so, dass das Ereignis B bei diesem Zufallsexperiment mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 eintritt.

3 **b)** Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert, den die Wahrscheinlichkeit von B annehmen kann.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Kugel mit Mittelpunkt $M(1|4|0)$ und Radius 6.

3 **a)** Bestimmen Sie alle Werte $p \in \mathbb{R}$, für die der Punkt $P(5|1|p)$ auf der Kugel liegt.

2 **b)** Die Gerade g berührt die Kugel im Punkt $B(-3|8|2)$. Ermitteln Sie eine mögliche Gleichung von g.

2 Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade g_a gegeben durch

$$g_a : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2 **a)** Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Punkts, in dem g_a die x_1x_2-Ebene schneidet.

3 **b)** Für genau einen Wert von a hat die Gerade g_a einen Schnittpunkt mit der x_3-Achse. Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Die Punkte $A(1|1|1)$, $B(0|2|2)$ und $C(-1|2|0)$ liegen in der Ebene E.

4 **a)** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

1 **b)** Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E mit der x_2-Achse an.

2 Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(3|-6|6)$ und $F(2|-4|4)$ sowie die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4 **a)** Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B. Zeigen Sie, dass sich g und h im Punkt F senkrecht schneiden.

1 **b)** Ein Punkt C liegt auf g und ist verschieden von F. Geben Sie die besondere Bedeutung der Strecke $[CF]$ im Dreieck ABC an.

10

Mathematik

Abiturprüfung 2018

Prüfungsteil B (CAS)

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.**

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

______________________________   Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{80x}{4+x^2}$ mit maximaler Definitionsmenge D und dem Graphen G.

2 **a)** Begründen Sie, dass $D = \mathbb{R}$ gilt, und weisen Sie rechnerisch nach, dass G symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

4 **b)** Begründen Sie unter Verwendung einer geeigneten Skizze, dass $\int_{-a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ mit $a < b$ gilt.

2 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k: x \mapsto \frac{80x}{k^2+x^2}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

5 **a)** Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k Lage und Art der Extrempunkte von G_k.

(zur Kontrolle: x-Koordinate des Hochpunkts: k)

2 **b)** Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_k(x) = 0$ gilt, und geben Sie die Wertemenge von f_k an.

2 **c)** Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die Intervalle, in denen G_k linksgekrümmt ist.

Im Folgenden werden nur Werte für k betrachtet, für die G_k und die Gerade mit der Gleichung $y = x$ im I. Quadranten ein Flächenstück einschließen.

3 **d)** Begründen Sie, dass $0 < k < \sqrt{80}$ gilt.

4 **e)** Bestimmen Sie den Wert von k so, dass das Flächenstück den Inhalt 50 besitzt; runden Sie das Ergebnis auf zwei Dezimalen.

3 Abbildung 1 zeigt modellhaft den Querschnitt eines geradlinig verlaufenden Deichs. Die Profillinie des Querschnitts wird für $0 \leq x < a$ durch den Graphen der Funktion f_8 und für $a \leq x \leq b$ durch eine Gerade g beschrieben. Dabei ist f_8 die zu $k = 8$ gehörende Funktion der Schar aus Aufgabe 2. Die x-Achse beschreibt im Intervall $[0; b]$ den unteren Abschluss des Querschnitts. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

(Fortsetzung nächste Seite)

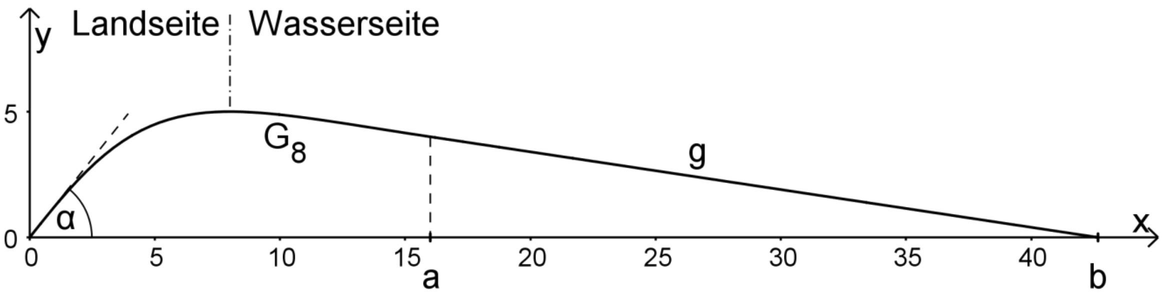


Abb. 1

2 **a)** Auf der Landseite am Fuß des Deichs darf der Böschungswinkel α (vgl. Abbildung 1) maximal 60° betragen. Untersuchen Sie rechnerisch, ob das bei dem vorliegenden Profil der Fall ist.

Der Graph der Funktion f_8 geht an der Stelle $x = a$ ohne Knick in die Gerade g über, die eine Steigung von 15 % gegenüber der Horizontalen besitzt. Dabei gilt $a > 15$.

4 **b)** Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Geraden g.

(zur Kontrolle: $y = -\frac{3}{20}x + \frac{32}{5}$)

5 **c)** Berechnen Sie das Volumen eines 10 m langen Teilstücks des Deichs. Gehen Sie dabei analog zur Bestimmung des Volumens eines Prismas mit Grundfläche G und Höhe h vor.

Auf der Landseite soll ein Teil des Deichs entfernt werden, um einen horizontalen Behelfsweg auf der Höhe h mit der Breite b zu bauen. Dabei entsteht eine vertikale Wand mit der Wandhöhe w (vgl. Abbildung 2).

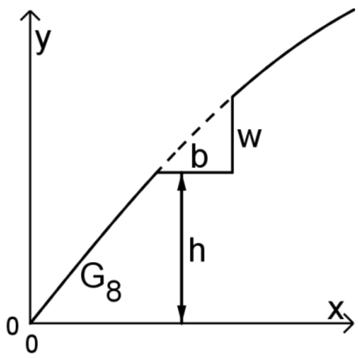


Abb. 2

4 **d)** Berechnen Sie die Wandhöhe w, wenn der Behelfsweg in einer Höhe von $h = 2{,}50\,\text{m}$ verlaufen und 1 m breit sein soll.

3 **e)** Beschreiben Sie, wie man allgemein die Wegbreite b rechnerisch bestimmen kann, wenn die Höhe h und die Wandhöhe w gegeben sind.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

2 **1 a)** Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse sowie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs an.

4 **b)** Für $50 < x < 130$ gibt es ein Paar von x-Werten, die sich um 60 unterscheiden und für die die zugehörigen Funktionswerte übereinstimmen. Bestimmen Sie dieses Paar von x-Werten und geben Sie den zugehörigen Funktionswert an.

3 **c)** Begründen Sie, dass sich aus den Informationen aus Aufgabe 1b schließen lässt, dass f für $50 < x < 130$ mindestens eine Extremstelle hat.

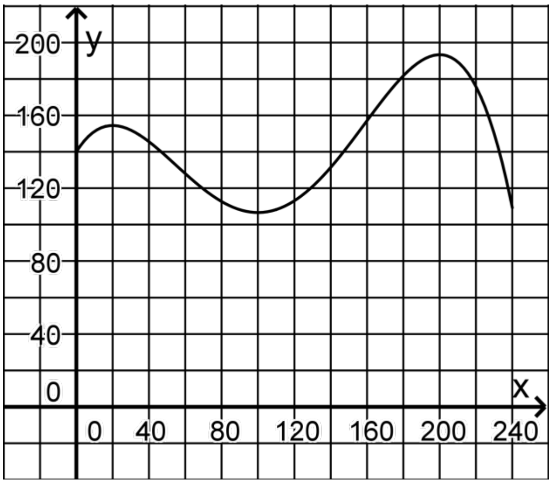
5 **d)** Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f und bestimmen Sie die Art dieser Extrempunkte.

(zur Kontrolle: Die Extremstellen sind 20, 100 und 200.)

2 **e)** Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass f genau zwei Nullstellen hat.

4 **f)** Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x = 240$ ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die parallel zur y-Achse verläuft und dieses Flächenstück halbiert.

2 Diabetespatientinnen und -patienten haben die Möglichkeit, mithilfe sogenannter CGM-Geräte ihren Glukosewert, d. h. den Anteil der Glukose im Blut, ständig zu messen. Die gegebene Funktion f beschreibt für $0 \leq x \leq 240$ modellhaft die Entwicklung des Glukosewerts eines Patienten. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ der Glukosewert in Milligramm pro Deziliter ($\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$).



Die Abbildung zeigt den Graphen von f im betrachteten Bereich.

3 **a)** Hohe Glukosewerte über längere Zeit gelten als Risikofaktor. Ermitteln Sie für den betrachteten Zeitraum, wie lange Glukosewerte über $170\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ gemessen wurden.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **b)** Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{f(100)-f(20)}{100-20}$ im Sachzusammenhang an und veranschaulichen Sie den Term in der Abbildung durch eine passende Gerade.

4 **c)** Ermitteln Sie für den betrachteten Zeitraum, wie lange die momentane Änderungsrate des Glukosewerts insgesamt zwischen $-0{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute und $+0{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute lag.

5 **d)** Der Mittelwert der Funktionswerte von f für $x \in [a;b]$ kann mit dem folgenden Term berechnet werden:

$$\tfrac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Berechnen Sie damit für den Zeitraum von 20 Minuten bis 100 Minuten nach Beobachtungsbeginn den Mittelwert aller Glukosewerte. Bestimmen Sie dessen prozentuale Abweichung vom Durchschnittswert derjenigen Glukosewerte, die in diesem Zeitraum im Abstand von jeweils zehn Minuten, beginnend mit dem Zeitpunkt 20 Minuten nach Beobachtungsbeginn, gemessen wurden.

Zum Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn nimmt der Patient Traubenzucker zu sich. Die anschließende Entwicklung des Glukosewerts soll im Modell mithilfe einer Funktion g beschrieben werden, die folgende Bedingung erfüllt:

Die beiden Werte, die das Modell zum Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn für den Glukosewert und für dessen momentane Änderungsrate liefert, sollen unabhängig davon sein, ob sie mithilfe der Funktion f oder mithilfe der Funktion g ermittelt werden.

Zur Bestimmung eines Funktionsterms von g sollen zunächst die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$h_k : x \mapsto 50 - 50 \cdot (k \cdot x + 1)^2 \cdot e^{-k \cdot x} \text{ mit } k \in \mathbb{R}^+$$

betrachtet werden.

2 **e)** Bestimmen Sie den Wert von k so, dass die momentane Änderungsrate, die sich unter Verwendung von h_k für den Zeitpunkt 0 ergibt, mit der momentanen Änderungsrate übereinstimmt, die f für den Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn liefert.

4 **f)** Die für die Funktion g angegebene Bedingung lässt sich erfüllen, wenn der Graph von g durch eine geeignete Verschiebung aus dem Graphen von h_k für $k = \frac{308}{3125}$ hervorgeht. Beschreiben Sie diese Verschiebung und geben Sie einen Funktionsterm von g an.

40

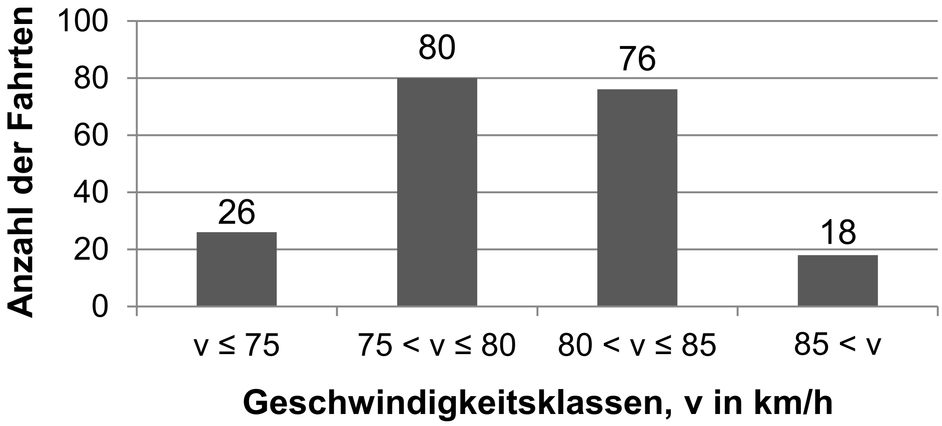
Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Auf einem Abschnitt einer wenig befahrenen Landstraße ist eine Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h zugelassen. An einer Stelle dieses Abschnitts wird die Geschwindigkeit vorbeifahrender Pkw gemessen. Im Folgenden werden vereinfachend nur solche Fahrten betrachtet, bei denen die Fahrer die Geschwindigkeit unabhängig voneinander wählen konnten.

1 Für die ersten 200 erfassten Fahrten ergab sich nach Einteilung in Geschwindigkeitsklassen die folgende Verteilung:



Bei 62 % der 200 Fahrten war der Fahrer allein unterwegs, 65 dieser Alleinfahrer fuhren zu schnell. Aus den 200 Fahrten wird eine zufällig ausgewählt. Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

A: „Der Fahrer war allein unterwegs.“

S: „Der Pkw war zu schnell.“

5 **a)** Weisen Sie nach, dass die Ereignisse A und S stochastisch abhängig sind, und geben Sie hierfür einen möglichen Grund im Sachzusammenhang an.

Die Geschwindigkeitsmessungen werden über einen längeren Zeitraum fortgesetzt. Dabei zeigt sich, dass die Verteilung der auf km/h genau gemessenen Geschwindigkeiten näherungsweise durch eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}8$ beschrieben werden kann. Beispielsweise entspricht B(100; 0,8; 77) näherungsweise dem Anteil der mit einer Geschwindigkeit von 77 km/h erfassten Pkw.

3 **b)** Bestätigen Sie exemplarisch für eine der beiden mittleren Geschwindigkeitsklassen der oben dargestellten Stichprobe, dass die ermittelte Anzahl der Fahrten mit der Beschreibung durch die Binomialverteilung im Einklang steht.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **c)** Bestimmen Sie unter Verwendung dieser Binomialverteilung die kleinste Geschwindigkeit v*, für die die folgende Aussage zutrifft: „Bei weniger als 5 % der erfassten Fahrten wird v* überschritten.“

2 Die Polizei führt an der Messstelle eine Geschwindigkeitskontrolle durch. Bei einer Geschwindigkeit von mehr als 83 km/h liegt ein Tempoverstoß vor. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass die Geschwindigkeit eines vorbeifahrenden Pkw mit einer Wahrscheinlichkeit von 19 % größer als 83 km/h ist.

4 **a)** Bestimmen Sie, z. B. durch systematisches Probieren, die Anzahl der Geschwindigkeitsmessungen, die mindestens durchgeführt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens zwei Tempoverstöße erfasst werden.

5 **b)** Liegt in einer Stichprobe von 50 Geschwindigkeitsmessungen die Zahl der Tempoverstöße um mehr als eine Standardabweichung unter dem Erwartungswert, geht die Polizei davon aus, dass wirksam vor der Geschwindigkeitskontrolle gewarnt wurde, und bricht die Kontrolle ab. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Geschwindigkeitskontrolle fortgeführt wird, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Tempoverstoß begangen wird, auf 10 % gesunken ist.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

1 Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4 % der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

3 **a)** 800 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft."

B: „Mindestens 5 % der Teile sind fehlerhaft."

Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Vermutung gerechtfertigt ist, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens 4 %." auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Teilen auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

4 **b)** Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

3 **c)** Das neue Granulat ist teurer als das vorherige. Geben Sie an, welche Überlegung zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe.

2 Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größen der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

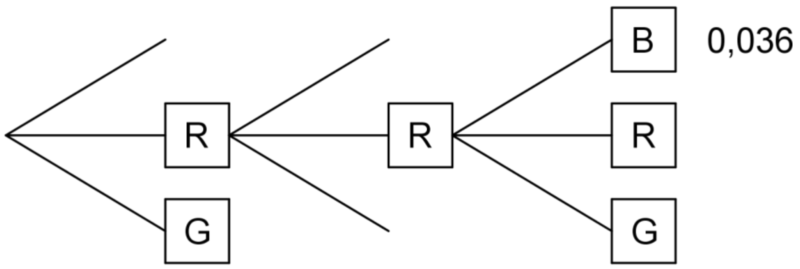
Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.

2 **a)** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, ebenfalls $\frac{1}{6}$ beträgt.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **b)** Bei dem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen. Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen.

5 **c)** Die Größen der Sektoren werden geändert. Dabei werden der grüne und der rote Sektor verkleinert, wobei der Mittelpunktswinkel des roten Sektors wieder doppelt so groß wie der des grünen Sektors ist. Die Abbildung zeigt einen Teil eines Baumdiagramms, das für das geänderte Glücksrad die drei Drehungen beschreibt. Ergänzend ist für einen Pfad die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben.



Bestimmen Sie die Größe des zum blauen Sektor gehörenden Mittelpunktswinkels.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Auf einem Spielplatz wird ein dreieckiges Sonnensegel errichtet, um einen Sandkasten zu beschatten. Hierzu werden an drei Ecken des Sandkastens Metallstangen im Boden befestigt, an deren Enden das Sonnensegel fixiert wird.
In einem kartesischen Koordinatensystem stellt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Boden dar. Der Sandkasten wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $K_1(0|4|0)$, $K_2(0|0|0)$, $K_3(3|0|0)$ und $K_4(3|4|0)$ beschrieben. Das Sonnensegel wird durch das ebene Dreieck mit den Eckpunkten $S_1(0|6|2{,}5)$, $S_2(0|0|3)$ und $S_3(6|0|2{,}5)$ dargestellt (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

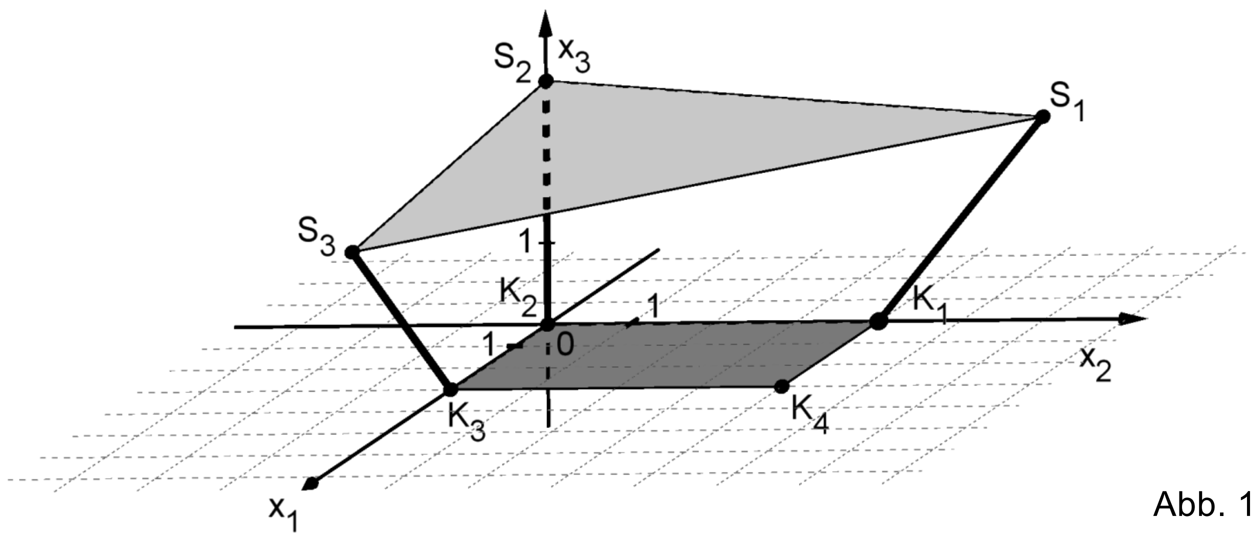


Abb. 1

Die drei Punkte S_1, S_2 und S_3 legen die Ebene E fest.

3 **a)** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(zur Kontrolle: $E: x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0$)

3 **b)** Berechnen Sie den Abstand des durch K_4 beschriebenen Eckpunkts des Sandkastens von der durch $[S_1S_3]$ beschriebenen Seite des Sonnensegels.

2 **c)** Der Hersteller des Sonnensegels empfiehlt, die verwendeten Metallstangen bei einer Sonnensegelfläche von mehr als $20\,\text{m}^2$ durch zusätzliche Sicherungsseile zu stabilisieren. Beurteilen Sie, ob eine solche Sicherung aufgrund dieser Empfehlung in der vorliegenden Situation nötig ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

Auf das Sonnensegel fallen Sonnenstrahlen, die im Modell und in der Abbildung 1 durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{S_1K_1}$ dargestellt werden können. Das Sonnensegel erzeugt auf dem Boden einen dreieckigen Schatten. Die Schatten der mit S_2 bzw. S_3 bezeichneten Ecken des Sonnensegels werden mit S_2' bzw. S_3' bezeichnet.

2 **d)** Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass S_2' auf der x_2-Achse liegt.

3 **e)** S_3' hat die Koordinaten $(6\,|-2\,|\,0)$. Zeichnen Sie das Dreieck, das den Schatten des Sonnensegels darstellt, in Abbildung 1 ein. Entscheiden Sie anhand der Zeichnung, ob mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet ist.

3 **f)** Um das Abfließen von Regenwasser sicherzustellen, muss das Sonnensegel einen Neigungswinkel von mindestens 8° gegenüber dem horizontalen Boden aufweisen. Begründen Sie, dass das Abfließen von Regenwasser im vorliegenden Fall nicht sichergestellt ist.

4 **g)** Bei starkem Regen verformt sich das Sonnensegel und hängt durch. Es bildet sich eine sogenannte Wassertasche aus Regenwasser, das nicht abfließen kann. Die Oberseite der Wassertasche verläuft horizontal und ist näherungsweise kreisförmig mit einem Durchmesser von 50 cm. An ihrer tiefsten Stelle ist die Wassertasche 5 cm tief. Vereinfachend wird die Wassertasche als Kugelsegment betrachtet (vgl. Abbildung 2).

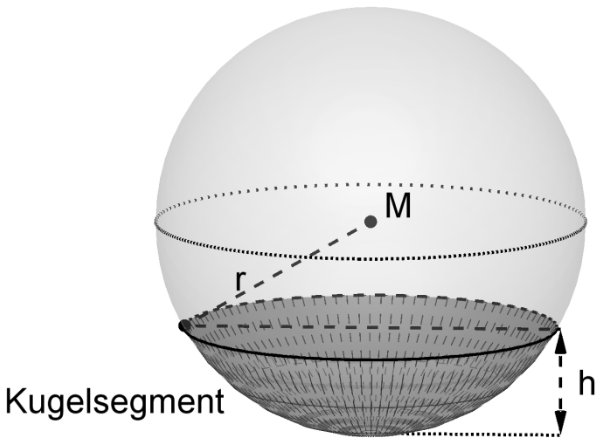


Abb. 2

Das Volumen V eines Kugelsegments kann mit der Formel $V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (3r - h)$ berechnet werden, wobei r den Radius der Kugel und h die Höhe des Kugelsegments bezeichnen. Ermitteln Sie, wie viele Liter Wasser sich in der Wassertasche befinden.

(zur Kontrolle: $r = 65\,cm$)

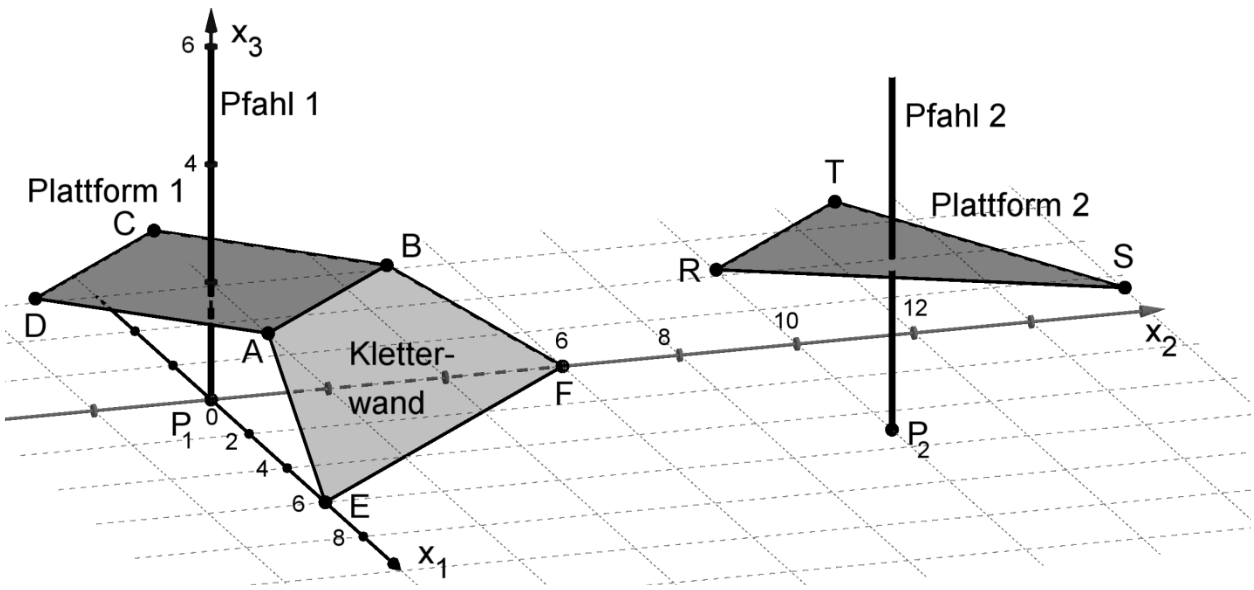
20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Elemente einer Kletteranlage: zwei horizontale Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind, sowie eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist.



Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund. Die Plattformen und die Kletterwand werden als ebene Vielecke betrachtet. Eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0|0|0)$ und $P_2(5|10|0)$ dargestellt. Außerdem sind die Eckpunkte $A(3|0|2)$, $B(0|3|2)$, $E(6|0|0)$, $F(0|6|0)$, $R(5|7|3)$ und $T(2|10|3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

3 **a)** In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20 % länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils.

3 **b)** Die Punkte A, B, E und F liegen in der Ebene L. Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Normalenform.

(zur Kontrolle: $L: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$)

5 **c)** Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines gleichschenkligen Trapezes hat, und berechnen Sie den Flächeninhalt der Kletterwand.

3 **d)** Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt.

(Fortsetzung nächste Seite)

Über ein Kletternetz kann man von einer Plattform zur anderen gelangen. Die vier Eckpunkte des Netzes sind an den beiden Pfählen befestigt. Einer der beiden unteren Eckpunkte befindet sich an Pfahl 1 auf der Höhe der zugehörigen Plattform, der andere untere Eckpunkt an Pfahl 2 oberhalb der Plattform 2. An jedem Pfahl beträgt der Abstand der beiden dort befestigten Eckpunkte des Netzes 1,80 m. Das Netz ist so gespannt, dass davon ausgegangen werden kann, dass es die Form eines ebenen Vierecks hat.

2 **e)** Begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Netzes unabhängig davon ist, in welcher Höhe sich die beiden 1,80 m voneinander entfernten Eckpunkte des Netzes an Pfahl 2 befinden.

4 **f)** Die untere Netzkante berührt die Plattform 2 an der Seite, die durch die Strecke $[RT]$ dargestellt wird. Betrachtet wird der untere Eckpunkt des Netzes, der oberhalb der Plattform 2 befestigt ist. Im Modell hat dieser Eckpunkt die Koordinaten $(5|10|h)$ mit einer reellen Zahl $h > 3$. Die untere Netzkante liegt auf der Geraden $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Abstand des betrachteten Eckpunkts von der Plattform 2.

20