ABITURPRÜFUNG 2018 ZUM ERWERB DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE AN FACHOBERSCHULEN UND BERUFSOBERSCHULEN

MATHEMATIK

(Haupttermin)

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Freitag, 18. Mai 2018, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten.
Die Auswahl trifft die Schule.

A I

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion f durch $f(x) = (x^2 - 2x - 3)e^{-0,5x} = (x+1)(x-3)e^{-0,5x}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

1.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. (4 BE)

1.2 Berechnen Sie Art und Koordinaten aller Extrempunkte von G_f. (6 BE)
[mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -0,5(x^2 - 6x + 1)e^{-0,5x}$]

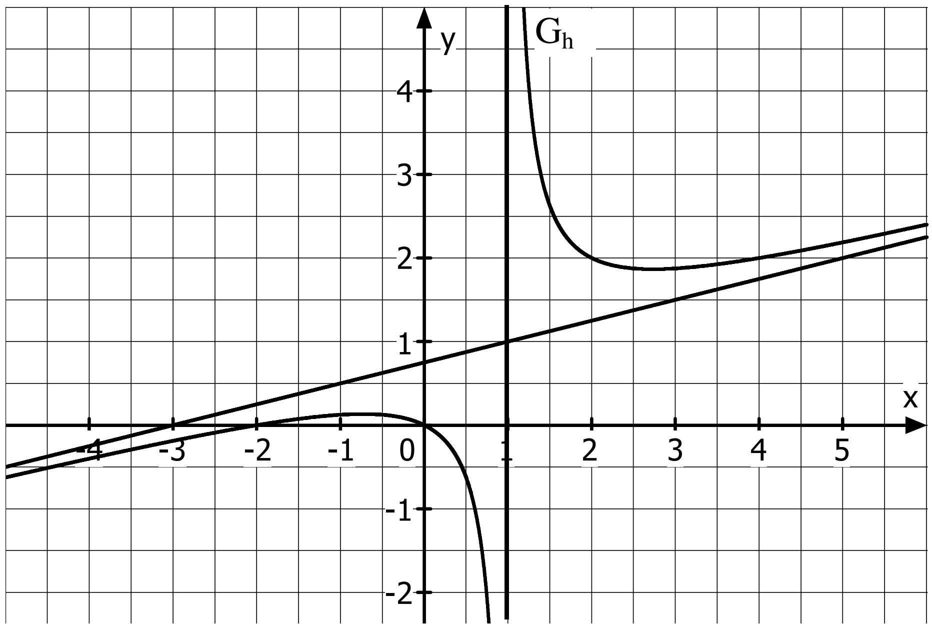
1.3 Zeichnen Sie G_f für $-2 \le x \le 12$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. (5 BE)

1.4 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto 5e^{-0,5x}$. Ihr Graph ist G_g. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_f und G_g und zeichnen Sie den Graphen G_g in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.3 ein.
[Teilergebnis: $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$] (5 BE)

1.5 Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto F(x) = -2e^{-0,5x}(x+1)^2$ mit $D_f = D_F$ eine Stammfunktion der Funktion f ist. (3 BE)

1.6 Die Graphen G_f und G_g schließen ein endliches Flächenstück ein, das in allen vier Quadranten liegt. Schraffieren Sie dieses im Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.3 und berechnen Sie die zugehörige Flächenmaßzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet. (5 BE)

2.0 Die Abbildung zeigt den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion $h: x \mapsto h(x) = 0,25x + 0,75 + \dfrac{a}{x+b}$, $D_{h,max} \subset \mathbb{R}$ mit seiner schiefen Asymptote $y = 0,25x + 0,75$ und der weiteren Asymptote x = 1. Es gilt $a, b \in \mathbb{R}$. Alle abzulesenden Werte sind ganzzahlig.



Fortsetzung nächste Seite

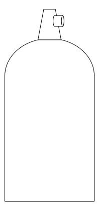
Fortsetzung A I

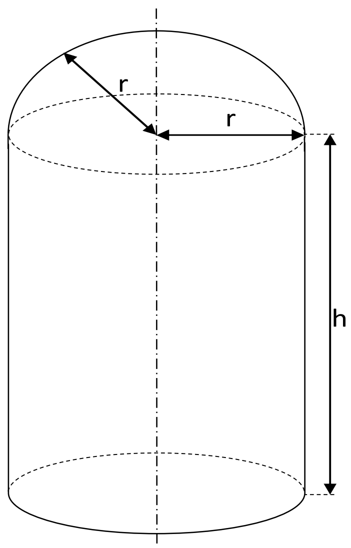
2.1 Aus der Gleichung der schiefen Asymptote können $\lim\limits_{x\to\infty}(h(x)-(0{,}25x+0{,}75))$ und $\lim\limits_{x\to\infty} h'(x)$ gefolgert werden. Geben Sie diese Grenzwerte an und begründen Sie Ihre Ergebnisse. (4 BE)

2.2 Für diese Teilaufgabe gilt x > 1. Lesen Sie aus der Abbildung die Lösungsmenge der Ungleichung h(x) < 2 ab. (2 BE)

2.3 Bestimmen Sie die Parameter a und b und geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion h an. (3 BE)

2.4 Gegeben ist die Funktion k mit $k(x)=\ln\left(h(x)\right)$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_k \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_k. Geben Sie die Definitionsmenge D_k von k und die Gleichungen der senkrechten Asymptoten von G_k an. (4 BE)

3.0  In hochwertige Edelstahlfläschchen sollen jeweils 100 cm^3 Parfüm abgefüllt werden. Die Form des Fläschchens ist durch einen geraden Kreiszylinder mit einer oben aufgesetzten Halbkugel vorgegeben. Die Aussparung für den Sprühkopf wird nicht berücksichtigt. Für die Oberfläche O (in cm^2) des Fläschchens in Abhängigkeit von seinem Radius r (in cm) erhält man die Funktionsgleichung $O(r)=\frac{5}{3}\pi r^2+\frac{200}{r}$ mit der Definitionsmenge $D_O=\left]0;\ 3{,}5\right]$. Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.



3.1 Bestimmen Sie das Verhalten von O(r) für $r \to 0$. (2 BE)

3.2 Berechnen Sie den Radius r, für den die Oberfläche O den absolut kleinsten Wert annimmt, und bestätigen Sie, dass $O_{min} \approx 112{,}23$ (cm^2) gilt. (7 BE)

3.3 Erstellen Sie für $1 \le r \le 3{,}5$ eine Wertetabelle mit der Schrittweite $\Delta r = 0{,}5$. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion O in ein Koordinatensystem im angegebenen Bereich. Wählen Sie hierfür einen geeigneten Maßstab. (5 BE)

3.4 Der Parfümhersteller möchte aus optischen Gründen den Radius r = 2 (cm) wählen. Berechnen Sie dafür den Mehrbedarf an Edelstahlblech im Vergleich zu O_{min} in Prozent. Begründen Sie stichhaltig, dass für alle Radien mit $r \in [2;\ 3{,}5]$ weniger als 10% Mehrbedarf an Blech im Vergleich zu O_{min} benötigt werden. (5 BE)

A II

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{2(x-3)(x-2)}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

1.1 Ermitteln Sie die Art der beiden Definitionslücken. (4 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass gilt: $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x-2) = x^2 - x - 2$.
Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen. (4 BE)

1.3.0 Im Folgenden wird die Funktion $g: x \mapsto \dfrac{1}{2}x + 1 + \dfrac{2}{x-3}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ betrachtet. Ihr Graph heißt G_g.

1.3.1 Stellen Sie durch geeignete Umformung den Zusammenhang zwischen den Funktionen f aus 1.0 und g aus 1.3.0 her. Geben Sie die Bedeutung der Funktion g für die Funktion f an. (3 BE)

1.3.2 Geben Sie die Nullstellen von g und die Gleichungen sowie die Art der Asymptoten des Graphen G_g an. (3 BE)

1.3.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und geben Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_g an. (7 BE)

[mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{(x-3)^2}$]

1.3.4 Zeichnen Sie G_g mit seinen Asymptoten für $-2 \le x \le 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (5 BE)

1.3.5 Bestimmen Sie die Wertemenge der Ableitungsfunktion g'. (3 BE)

1.3.6 Der Graph G_g schließt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl dessen Flächeninhalts. (4 BE)

2.0 Betrachtet wird nun die Funktion $h: x \mapsto \ln(2 \cdot g(x))$ in der Definitionsmenge $D_h =]-1; 2[\cup]3; \infty[$, wobei $g(x)$ der Funktionsterm aus Teilaufgabe 1.3.0 ist. Der Graph von h heißt G_h.

2.1 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte h(x) bei Annäherung an die Grenzen der Definitionsmenge. (4 BE)

2.2 Zeigen Sie, dass für die Wertemenge von h gilt: $W_h = \mathbb{R} \setminus]0; \ln(9)[$.
Verwenden Sie dazu auch die bisherigen Ergebnisse von Aufgabe 1.3 und Aufgabe 2.1. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AII

3.0 Zur Bekämpfung von Schädlingsfliegen werden auf einer Insel unfruchtbare Fliegen-Männchen ausgesetzt. Im Folgenden wird die gesamte Fliegenpopulation p in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ durch $p(t) = 10 \cdot e^{-0{,}002t^2+0{,}06t+c}$ mit $c \in IR$ modelliert. Dabei ist $t = 0$ der Zeitpunkt, zu dem die Kiste mit den unfruchtbaren Fliegen-Männchen geöffnet wird. Die Population p wird in Millionen Stück und die Zeit t in Tagen angegeben. Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden.

3.1 Beim Öffnen der Kiste beträgt die Gesamtpopulation inklusive der ausgesetzten Männchen 6,38 Millionen Fliegen. Berechnen Sie den Wert des Parameters c auf zwei Nachkommastellen gerundet. (2 BE)
[Ergebnis: $c = -0{,}45$]

3.2 Zeigen Sie, dass die Population nach einigen Tagen ihren absoluten Höchststand erreicht. Bestimmen Sie diesen Höchststand und den dazugehörigen Zeitpunkt. (4 BE)
[mögliches Teilergebnis: $\dot{p}(t) = (0{,}6 - 0{,}04t) \cdot e^{-0{,}002t^2+0{,}06t-0{,}45}$]

3.3 Zum Zeitpunkt $t_W = 30{,}81$ (Tage) weist die Funktion p eine Wendestelle auf (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Differenz $p(t_W + 0{,}5) - p(t_W - 0{,}5)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. (3 BE)

3.4 Zeichnen Sie für $0 \leq t \leq 60$ auch unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von p. Erreicht p den Wert 0,5 Millionen, gelten die Fliegen als ausgerottet. Bestimmen Sie diesen Zeitpunkt näherungsweise aus Ihrer Zeichnung. (6 BE)
Maßstab auf der t-Achse: 1 cm $\hat{=}$ 5 Tage,
Maßstab auf der p-Achse: 1 cm $\hat{=}$ 1 Million Fliegen.

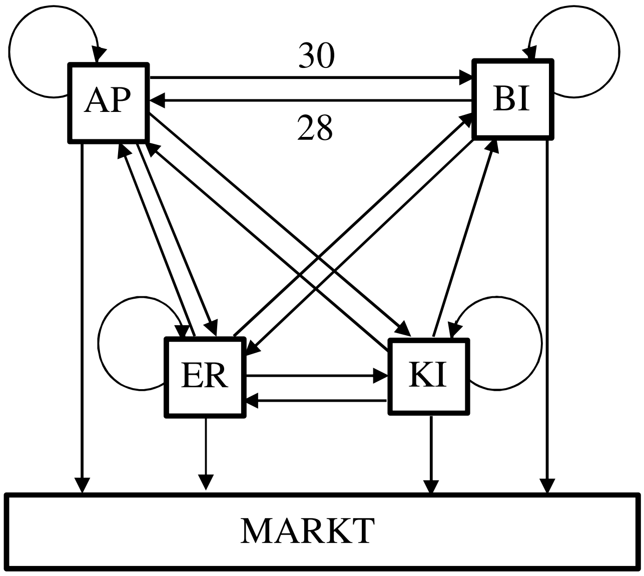
3.5 Die durchschnittliche Population $\overline{p}$ über einen Zeitraum $[t_1; t_2]$ beträgt $\overline{p} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt$. Im Folgenden soll $\overline{p}$ über den Zeitraum $[15; 35]$ geschätzt werden: Markieren Sie dazu ein geeignetes Flächenstück in der Zeichnung aus Teilaufgabe 3.4. Schätzen Sie die Maßzahl A dieses Flächenstücks aus der Zeichnung heraus ab und berechnen Sie damit einen Näherungswert für $\overline{p}$. (4 BE)

B I

1.0 Apfelbauer AP, Birnenbauer BI, Kirschenbauer KI und Erdbeerbauer ER sind vier Obstbauern vom Bodensee, die untereinander die Obstsorten tauschen, um jeweils in ihrem Hofladen den Kunden verschiedene, gemischte Obstkisten anbieten zu können.

1.1 Die vier Bauern sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verbunden. Die Inputmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}7 & 0 & 0{,}03 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$



Die Gesamtproduktion von KI beträgt 200 ME (Mengeneinheiten), diejenige von ER 600 ME.
Übertragen Sie nebenstehendes Verflechtungsdiagramm auf Ihren Bearbeitungsbogen, berechnen Sie alle fehlenden Zahlenwerte und tragen Sie diese in Ihr Diagramm ein. (7 BE)

1.2.0 Nach der Erdbeer-Saison steigt Bauer ER aus dem gemeinsamen Tausch aus, während AP, BI und KI weiter zusammenarbeiten. Für die neue, veränderte Inputmatrix A^* gilt: $A^* = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

1.2.1 Die Produktionszahlen ändern sich zum Saisonende und werden durch den Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 700+2k \\ 600 \\ 150-k \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}_0^+$ dargestellt.
Berechnen Sie die Produktionsmengen der Bauern, wenn BI 124 ME an den Markt abgibt. (4 BE)

1.2.2 Nach strukturellen Veränderungen in den Betrieben kalkulieren die Bauern AP, BI und KI für die kommende Saison eine Marktabgabe von 351 ME an Äpfeln, 157 ME Birnen und 76 ME Kirschen.
Bestimmen Sie die Mengen an Obst, die die Bauern bei gleichbleibender Verflechtung jeweils produzieren müssten, um die Konsummengen zu erreichen. (5 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung B I

2.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A(2| 2| –1), B(0| –2| 1) und C_k (k| –2+k| –k) mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

2.1 Die Punkte A und B legen die Gerade g fest, die Punkte C_k liegen auf der Geraden h. Geben Sie jeweils eine Gleichung der beiden Geraden an und untersuchen Sie die gegenseitige Lage der beiden Geraden. (6 BE)

2.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt $k = -3$. Es ergibt sich C_{-3} (–3| –5| 3).

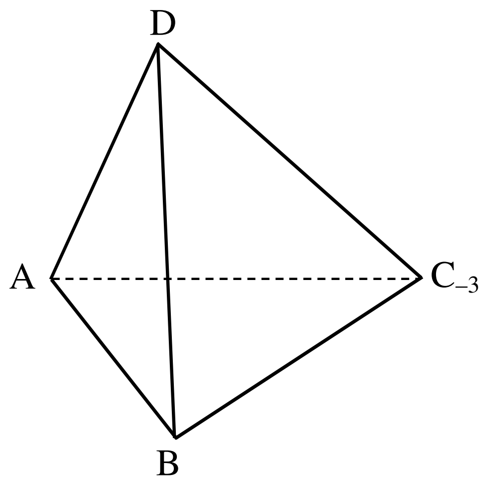
2.2.1 Die Punkte A, B und C_{-3} legen die Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Koordinatenform. (5 BE)
[mögliches Teilergebnis: E: $x_1 + x_2 + 3x_3 - 1 = 0$]

2.2.2 Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Ebene E mit der Ebene

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$ mit $r, t \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie gegebenenfalls

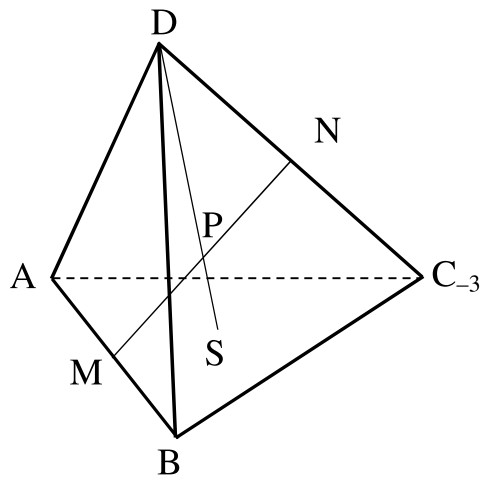
eine Gleichung der Schnittgeraden. (3 BE)

2.2.3 Die Punkte A, B, C_{-3} und D(3| 5| 5) legen ein Tetraeder fest (siehe Skizze).
Spiegelt man den Punkt C_{-3} am Punkt D, so erhält man den Punkt C^*_{-3}. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C^*_{-3}. (2 BE)



2.2.4 Der Punkt C^*_{-3} liegt in der Ebene F (Nachweis nicht erforderlich). Eine der Seitenflächen des Tetraeders liegt ganz in der Ebene F. Entscheiden Sie, welche der Flächen das ist und begründen Sie Ihre Entscheidung. (2 BE)

2.2.5 Der Punkt $S(-\frac{1}{3} \mid -\frac{5}{3} \mid 1)$ ist Schwerpunkt des Dreiecks ABC_{-3}, der Punkt M ist Mittelpunkt der Kante $\overline{AB}$ und der Punkt N ist Mittelpunkt der Kante $\overline{DC_{-3}}$. Die Gerade MN und die Gerade DS schneiden sich im Punkt P.
Berechnen Sie Koordinaten des Punktes P.
(6 BE)



B II

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 ist die Ebenenschar $F_{a;b}: ax_1 + bx_2 + 2x_3 - 2 = 0$ mit $a, b \in IR$ gegeben. Die Ebene E schneidet die x_1-Achse bei $x_1 = 2$ und die anderen beiden Achsen bei $x_2 = 1$ und $x_3 = 1$.

1.1 Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und in Koordinatenform. (5 BE)
[mögliches Ergebnis: $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0$]

1.2 Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebenen $F_{a;b}$ im Koordinatensystem in Abhängigkeit von a und b . (3 BE)

1.3.0 Für $a = b = 1$ ergibt sich die Ebene $F_{1,1}$, im Folgenden Ebene F genannt.

1.3.1 Die Ebenen E und F schneiden sich in der Geraden h. Bestimmen Sie eine Gleichung von h. (3 BE)
[mögliches Ergebnis: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$]

1.3.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Ebene F mit der x_2-Achse. Zeichnen Sie die Ebenen E und F sowie die Schnittgerade h in ein Koordinatensystem. (4 BE)

1.4.0 Ferner ist die Geradenschar $g_c: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} c-1 \\ 1+c \\ -c \end{pmatrix}$ mit $c, m \in IR$ gegeben.

1.4.1 Zeigen Sie, dass es einen Wert für c gibt, für den die zugehörige Gerade g_c echt parallel zur Geraden h verläuft. (3 BE)

1.4.2 Untersuchen Sie die Lage der Geraden g_c zur Ebene E in Abhängigkeit von c. (4 BE)

2.0 Die Wirtschaftssektoren U, V und W sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verbunden.

Es gilt die Inputmatrix $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,25 & 0,05 \cdot t & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,55 \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 20,\ t \in IR$.

2.1 Im 1. Quartal des Jahres produzierte Sektor U 1000 ME (Mengeneinheiten) seiner Waren und gab davon 4 % an den Markt ab. Sektor W produzierte 500 ME und Sektor V gab 10 ME an den Markt ab. Bestimmen Sie die Gesamtproduktion von Sektor V, die Marktabgabe von Sektor W sowie den passenden Wert für t. (6 BE)

2.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt $t = 11$.

2.2.1 Im folgenden Quartal ist die Marktabgabe $\vec{y} = (40\ \ 14\ \ 41)^T$ geplant. Berechnen Sie die Produktionszahlen der drei Sektoren für dieses Quartal. (5 BE)

2.2.2 Im nächsten Quartal produziert Sektor U 1120 ME. Die Produktionsmengen von V und W verhalten sich wie 2:1. Jeder der drei Sektoren gibt mindestens 8 ME an den Markt ab. Untersuchen Sie für die Sektoren V und W, in welchem Bereich sich die jeweiligen Produktionszahlen bewegen, und geben Sie den Bereich der Marktabgabe von Sektor U an. (7 BE)