ABITURPRÜFUNG 2018 AN BERUFSOBERSCHULEN UND FACHOBERSCHULEN ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

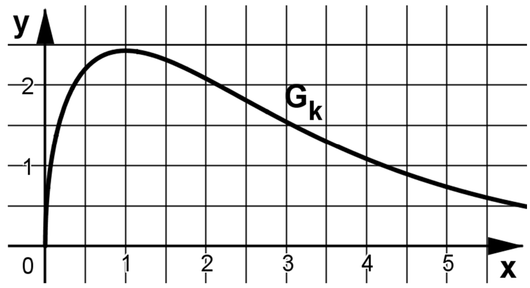
Freitag, den 18. Mai 2018, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten.
Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A: Analysis
A I

BE		
	1.0	Gegeben ist die Funktion $f_a: x \mapsto \frac{x \cdot e^{ax}}{(1+ax)^2}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{a}\}$.
8	**1.1**	Geben Sie die Nullstelle von f_a an und bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge sowie die Gleichungen der achsenparallelen Asymptoten.
6	**1.2**	Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a. [Mögliches Teilergebnis: $f_a^{/}(x) = \frac{e^{ax}(1+a^2x^2)}{(1+ax)^3}$]
4	**1.3**	Zeichnen Sie für $a=1$ den Graphen von f_1 für $-3 \le x \le 4$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1 LE = 1 cm). Tragen Sie auch die Asymptoten aus Aufgabe 1.1 ein.
7	**1.4**	Gegeben ist nun die Integralfunktion F durch $F(x) = \int_1^x f_1(t)dt$ mit der Definitionsmenge $D_F =]-1;+\infty[$. Bestimmen Sie ohne weitere Rechnung das Monotonieverhalten und die Extremstelle des Graphen von F sowie sein Krümmungsverhalten. Ermitteln Sie die Anzahl und die ungefähre Lage der Nullstellen von F.
7	**1.5**	Die Gerade mit der Gleichung $x=-2$, die x-Achse und der Graph von f_1 begrenzen eine Fläche, die unendlich weit nach links reicht. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche. Bestimmen Sie dazu $\int xe^x \cdot \frac{1}{(1+x)^2}dx$ mittels partieller Integration.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
	2.0	Gegeben sind nun die Funktionen g und h durch die Gleichungen $g(x) = \arcsin(\frac{4x}{x^2+4})$ und $h(x) = 2 \cdot \arctan(\frac{1}{2}x) + \pi$ mit $x \in \mathbb{R}$.
10	**2.1**	Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten und das Monotonieverhalten sowie die Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von g. [Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{-4(x^2-4)}{\lvert x^2-4 \rvert \cdot (x^2+4)}$]
4	**2.2**	Zeigen Sie, dass sich $g(x)$ und $h(x)$ für $\lvert x \rvert < 2$ nur um eine additive Konstante unterscheiden, und bestimmen Sie diese.
5	**3**	Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto 4\sqrt{x} \cdot e^{-0{,}5x}$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}_0^+$. Ein Ausschnitt ihres Graphen G_k ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen. Bei der Rotation des Graphen von k um die x-Achse entsteht ein unendlich ausgedehnter Drehkörper. Berechnen Sie die Maßzahl seines Volumens. 
9	**4**	Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $$-(x+3) \cdot y' + y = \frac{x-5}{x+3} \quad \text{für } x > -3$$ mit der Methode der Variation der Konstanten. [Mögliches Teilergebnis: $y_h = D \cdot (x+3),\ D \in \mathbb{R}$]
60		

Aufgabengruppe A: Analysis
A II

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$ mit der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge D_g.

3 **1.1** Zeigen Sie, dass gilt: $D_g = [0{,}5; +\infty[$, und ermitteln Sie das Verhalten von $g(x)$ für $x \to +\infty$.

10 **1.2** Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen von g. Bestimmen Sie außerdem das Verhalten von $g'(x)$ für $x \to 0{,}5$ und geben Sie die Wertemenge der Funktion g an.

[Teilergebnis: $g'(x) = \frac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$]

1.3.0 Nun wird die Funktion f festgelegt durch $f(x) = \arccos(g(x))$ mit der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge D_f.

2 **1.3.1** Begründen Sie, dass gilt: $D_f = [0{,}5; +\infty[$.

10 **1.3.2** Ermitteln Sie eine absolutbetragfreie Darstellung von $f'(x)$ und die maximale Definitionsmenge $D_{f'}$ von f'. Bestimmen Sie das Verhalten von $f'(x)$ für $x \to 1$ und geben Sie die Bedeutung dieses Ergebnisses für die Funktion f und ihren Graphen an.

[Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x-1}{|x-1| \cdot x \cdot \sqrt{2x-1}}$]

9 **1.3.3** Bestimmen Sie für den Graphen von f das Monotonieverhalten sowie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte. Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und begründen Sie, ob der Graph von f Wendepunkte besitzt.

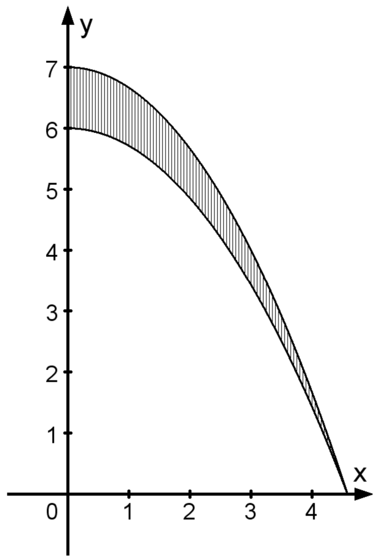
4 **1.3.4** Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $0{,}5 \le x \le 6$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 1 cm).

7 **1.4** Gegeben ist nun die Integralfunktion $F: x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_F = D_f$.

Bestimmen Sie ohne weitere Rechnung das Monotonieverhalten und die Extremstelle des Graphen der Funktion F sowie die Art und die Koordinaten eventueller Punkte des Graphen von F mit waagrechter Tangente.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
7	**2**	Für eine Lampe wird eine parabelförmig begrenzte Abdeckung aus Acrylglas benötigt (Dichte von Acrylglas: $\rho = 1{,}18\,\frac{g}{cm^3}$). Das Musterstück entsteht als Rotationskörper des in der nebenstehenden Abbildung dargestellten Flächenstücks, das von den Graphen der beiden Funktionen p_1 und p_2 mit $p_1(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 7$ und $p_2(x) = -\frac{2}{7}x^2 + 6$ für $0 \leq x \leq \sqrt{21}$ im I. Quadranten begrenzt wird, bei der Rotation um die y-Achse. Eine Längeneinheit beträgt 1 cm. Ermitteln Sie die Masse der Abdeckung.
8	**3**	Gegeben ist die Differenzialgleichung $y' + \frac{x}{x^2+1} \cdot y = x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mit der Methode der Variation der Konstanten. [Mögliches Teilergebnis: $y_h = D \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $D \in \mathbb{R}$]
60		



Aufgabengruppe B: Stochastik
B I

BE	
	In einer Postfiliale werden die auszuliefernden Pakete nur nach Privat- oder Firmenadressen unterschieden.
	1.0 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges Paket an einen privaten Adressaten gerichtet ist, sei p. Es werden nun 20 zufällig ausgewählte auszuliefernde Pakete betrachtet.
2	**1.1** Die Pakete werden in zufälliger Reihenfolge auf ein Förderband gelegt. Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Reihenfolgen möglich sind, wenn Pakete mit gleichartigen Adressaten nicht unterschieden werden und a) die Hälfte dieser Pakete eine Privatanschrift trägt. b) darunter genau acht Pakete mit Firmenadresse sind und diese aufeinander folgen.
4	**1.2** Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse: A: „Mindestens zwei Pakete besitzen eine Privatadresse." B: „Das letzte Paket ist das zehnte, das an eine Privatadresse gerichtet ist."
4	**1.3** Ermitteln Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit p wenigstens sein muss, wenn unter den 20 Paketen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % mindestens eines eine Privatadresse trägt.
3	**1.4** Die Wahrscheinlichkeit, dass von den ersten drei Paketen mindestens eines nicht an einen Privatadressaten gerichtet ist, sei 65,7 %. Berechnen Sie p.
3	**1.5** Berechnen Sie für p = 70 % die Wahrscheinlichkeit, dass von den 20 Paketen mindestens 13 aber höchstens 18 Pakete an eine Privatadresse gerichtet sind.
	2.0 Der Anteil an Privatadressen in dieser Postfiliale beträgt 70 %. Erfahrungsgemäß können 20 % aller Pakete nicht direkt zugestellt werden.
7	**2.1** Die Hälfte dieser nichtzustellbaren Pakete trägt erfahrungsgemäß eine Privatadresse. Verwenden Sie die Bezeichnungen E: „Das Paket hat einen privaten Empfänger." und $\overline{Z}$: „Das Paket kann nicht direkt zugestellt werden.", um die Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln, dass a) ein Paket, das direkt zugestellt werden konnte, keinen privaten Empfänger hat. b) ein an einen privaten Empfänger adressiertes Paket direkt zugestellt werden konnte.
7	**2.2** Bestimmen Sie mithilfe der Normalverteilung als Näherung ein möglichst kleines zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die Anzahl der nicht direkt zugestellten Pakete bei 1500 Zustellungen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % liegt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
	3.0	Erfahrungsgemäß werden bislang höchstens 6 % der Pakete verspätet zugestellt. Da in letzter Zeit vermehrt Beschwerden eingegangen sind, kommt der Verdacht auf, dass die Zusteller nicht mehr so zuverlässig arbeiten. Um diese Vermutung zu testen, werden 500 willkürlich ausgewählte Adressaten befragt. Verwenden Sie zur Berechnung jeweils die Normalverteilung als Näherung.
7	**3.1**	Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an. Berechnen Sie dann, ab welcher möglichst klein gewählten Anzahl verspäteter Pakete der Verdacht bestätigt wird, wenn dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % in Kauf genommen wird.
3	**3.2**	Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der man irrtümlich davon ausgeht, dass 6 % der Pakete verspätet zugestellt werden, obwohl der Prozentsatz verspätet zugestellter Pakete auf 10 % gestiegen ist und die Nullhypothese bis einschließlich 39 verspäteten Zustellungen angenommen wird.
40		

Aufgabengruppe B: Stochastik
B II

BE

Ein Kaufhaus verkauft aus einem großen Bestand bestickte Lederhosen in den Farben schwarz, braun und antik. Aus Erfahrung weiß man, dass die Kunden, die eine Lederhose kaufen, schwarze Lederhosen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 und braune bzw. antike jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 kaufen.

2 **1** Auf einem Verkaufsständer hängen 12 Lederhosen, von jeder der drei Farben gleich viele. Es wird angenommen, dass sich die Hosen nur durch ihre Farbe unterscheiden. Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Hosen nebeneinander anzuordnen.

4 **2** Das Kaufhaus verkauft zwanzig Lederhosen nacheinander. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: „Mindestens acht Lederhosen sind braun.“
B: „Die als letzte verkaufte Lederhose ist die zehnte verkaufte schwarze Hose.“

4 **3** Ermitteln Sie, wie viele Lederhosen mindestens verkauft werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 95 % mindestens eine braune Lederhose verkauft wird.

7 **4** Bestimmen Sie mithilfe der Normalverteilung als Näherung ein möglichst kleines zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die Anzahl der schwarzen Lederhosen bei 150 verkauften Lederhosen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % liegt.

5.0 Der Verkaufsleiter liest in einer aktuellen Modezeitschrift, dass nach neuesten Umfragen in der Bevölkerung die Begeisterung für schwarze Lederhosen nachgelassen hat. Zur Überprüfung dieser Vermutung kontrolliert er den Verkauf der nächsten 150 Lederhosen. Lösen Sie die Teilaufgaben 5.1 und 5.2 mithilfe der Normalverteilung als Näherung.

7 **5.1** Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich und den zugehörigen Annahmebereich der Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von 1 %.

3 **5.2** Ermitteln Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit bei dem obigen Test ist, dass die Nullhypothese angenommen wird, wenn tatsächlich nur 26 % der Kunden eine schwarze Lederhose kaufen und die Nullhypothese bis 45 verkaufte schwarze Lederhosen abgelehnt wird.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
	6.0	Die Herstellung der Lederhosen erfolgt in den beiden voneinander unabhängigen Arbeitsschritten „Nähen“ und „Besticken“. Nach dem Nähen weisen 8 % Nähfehler auf. Alle Lederhosen werden nach dem Nähen bestickt. 6 % weisen danach Stickfehler auf. Lederhosen mit Näh- oder Stickfehlern werden zum halben Preis verkauft, fehlerfreie Lederhosen zum vollen Preis.
5	**6.1**	Bestimmen Sie, wie hoch der Preis für eine fehlerfreie Lederhose sein muss, wenn der durchschnittliche Preis pro verkaufter Lederhose 120 Euro betragen soll.
8	**6.2**	Durch die Anschaffung neuer Maschinen zur Herstellung der Lederhosen erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine gefertigte Lederhose fehlerfrei ist, auf 90 %. Das Kaufhaus benötigt zum Beginn des Oktoberfestes mindestens 500 fehlerfreie Lederhosen. Ermitteln Sie mithilfe der Normalverteilung als Näherung, wie viele Lederhosen mindestens gefertigt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % genügend fehlerfreie Lederhosen geliefert werden können.
40		