

ABITURPRÜFUNG 2016 AN BERUFSOBERSCHULEN  
UND FACHOBERSCHULEN  
ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN  
HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK  
mit CAS

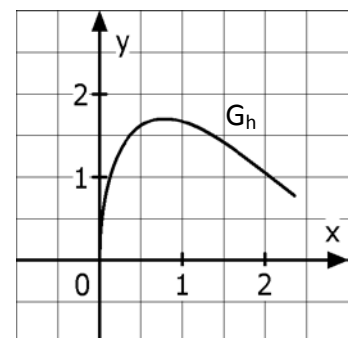
Ausbildungsrichtung Technik

Dienstag, den 31. Mai 2016, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den  
Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;  
die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A  
A I mit CAS

- 1 Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)$  mit der Definitionsmenge  $D_f = ]-2 ; 2]$ .
- 1.1 Bestimmen Sie jeweils **ohne CAS** das Monotonieverhalten sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunkts des Graphen von  $f$  und die Wertemenge von  $f$ . (6 BE)  
(mögliches Teilergebnis:  $f'(x) = -0,5 \cdot (4 - x^2)^{-0,5}$ )
- 1.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von  $f$  sowie die Gleichung der Wendetangente  $w$ . Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  und die Wendetangente auch unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem (1LE=2cm; Platzbedarf für 1.4:  $-2 \leq y \leq 2$ ). (8 BE)
- 1.3 Der Graph von  $f$  und die Koordinatenachsen schließen im I. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie **ohne CAS** die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche. (6 BE)
- 1.4 Begründen Sie, dass  $f$  umkehrbar ist, und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  im Schnittpunkt dieses Graphen mit der  $x$ -Achse. Zeichnen Sie den Graphen von  $f^{-1}$  in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.2. (5 BE)
- 2 Gegeben ist die Funktion  $g_a : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2}{a-x}\right)$  mit der maximalen Definitionsmenge  $D_a = ]-\infty ; a[ \setminus \{0\}$  und dem Parameter  $a \in \mathbb{R}^+$ .
- 2.1 Bestimmen Sie **ohne CAS** die Nullstellen von  $g_a$  in Abhängigkeit von  $a$  sowie die Anzahl der Nullstellen. Ermitteln Sie ebenfalls **ohne CAS** das Verhalten der Funktionswerte  $g_a(x)$  an den Rändern von  $D_a$ . (9 BE)
- 2.2 Ermitteln Sie für  $a=6$  das Monotonieverhalten des Graphen von  $g_6$  und zeichnen Sie den Graphen von  $g_6$  für  $-6 \leq x < 6$  in ein kartesisches Koordinatensystem (1LE=1cm). (8 BE)
- 2.3 Gegeben ist weiter die Integralfunktion  $G$  durch  $G(x) = \int_2^x g_6(t) dt$  mit der Definitionsmenge  $D_G = ]0 ; 6[$ .  
Begründen Sie ohne weitere Rechnung das Monotonieverhalten des Graphen von  $G$  und die Art und Koordinaten des Extrempunkts. Schätzen Sie den Wert  $G(4)$  durch Berechnung der Obersumme mit  $\Delta x = 0,5$  ab. (6 BE)
- 3 Durch die Rotation des Graphen der Funktion  
 $h : x \mapsto 3 \cdot \sqrt{e^{-x} \cdot \sin(x)}$ ,  $D_h = [0 ; \frac{3}{4}\pi]$ , um die  $x$ -Achse entsteht ein Rotationskörper, welcher die Form einer Blumenvase beschreibt. Berechnen Sie **ohne CAS** die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers. (6 BE)



- 1 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-3)}$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ .
- 1.1 Geben Sie die Nullstelle von  $f$  an und zeigen Sie, dass der Graph von  $f$  symmetrisch ist. (4 BE)
- 1.2 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte  $f(x)$  an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von  $f$  an. (5 BE)
- 1.3 Ermitteln Sie **ohne CAS** das Monotonieverhalten des Graphen von  $f$ . (5 BE)  
(mögliches Teilergebnis:  $f'(x) = -8(x-1) \cdot [(x+1)(x-3)]^{-2}$ )
- 1.4 Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  für  $-7 \leq x \leq 7$  unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. Tragen Sie auch alle Asymptoten ein (1LE=1cm). (4 BE)
- 1.5 Der Graph von  $f$  schließt mit der  $x$ -Achse und den Geraden mit den Gleichungen  $x=4$  und  $x=6$  eine Fläche ein. Ermitteln Sie **ohne CAS** die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen. (6 BE)
- 1.6 Begründen Sie, dass die Funktion  $g$  mit  $g(x)=f(x)$  und  $D_g=[3;+\infty[$  umkehrbar ist. Bestimmen Sie **ohne CAS** den Term der Umkehrfunktion  $g^{-1}$ , deren Definitionsmenge sowie die Steigung des Graphen von  $g^{-1}$  an der Stelle  $x=\frac{4}{3}$ . (7 BE)
- 2 Gegeben ist weiter die Funktion  $k: x \mapsto \arctan(f(x))$  mit der Funktion  $f$  aus Aufgabe 1 und  $D_k=D_f$ .
- 2.1 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte  $k(x)$  an den Rändern von  $D_k$  sowie die Gleichung der Asymptote des Graphen von  $k$ . (4 BE)
- 2.2 Bestimmen Sie **ohne CAS** für den Graphen von  $k$  das Monotonieverhalten sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunkts. (4 BE)
- 3 Gegeben ist nun die Funktion  $h: x \mapsto 5x \cdot e^{2x}$  mit  $D_h=]-\infty; 0]$ .
- 3.1 Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von  $h$ . Zeichnen Sie den Graphen für  $-3 \leq x \leq 0$  (1LE=2cm). (7 BE)
- 3.2 Bei der Rotation des Graphen von  $h$  um die  $x$ -Achse entsteht ein unendlich ausgedehnter Drehkörper. Berechnen Sie **ohne CAS** die Maßzahl seines Volumens. (7 BE)
- 4 Bestimmen Sie **ohne CAS** die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
- $$y' + y \cdot \cos(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$
- mit der Methode der Variation der Konstanten. (7 BE)

## Aufgabengruppe B

### B I mit CAS

- 1 Einem Eishockey-Trainer stehen insgesamt 15 Spieler zur Verfügung, wobei es sich um zwölf Feldspieler und drei Torhüter handelt.
  - 1.1 Vor Spielbeginn laufen alle 15 Spieler hintereinander in die Arena ein. Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Reihenfolgen es dafür gibt, wenn der Spielführer als Letzter das Eis betritt. (2 BE)
  - 1.2 Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten der Trainer für die Anfangsaufstellung hat, wenn zu Beginn vier Feldspieler und ein Torhüter auf dem Eis stehen. (2 BE)
- 2 Erfahrungsgemäß wehrt der Stammtorhüter 95% aller „Torschüsse“ ab. Ein nicht abgewehrter „Torschuss“ führt immer zu einem Tor.
  - 2.1 In einem Spiel werden auf das Tor dieser Mannschaft 50 Torschüsse abgegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Stammtorhüter
    - a) genau 47 der Torschüsse abwehrt.
    - b) mindestens einen Torschuss, aber höchstens vier Torschüsse nicht abwehren kann.
    - c) die ersten 20 und insgesamt 47 Torschüsse abwehrt. (6 BE)
  - 2.2 Bestimmen Sie, wie viele Torschüsse die gegnerische Mannschaft auf den Stammtorhüter mindestens abgeben muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% mindestens ein Tor zu erzielen. (4 BE)
- 3 Zur neuen Saison kaufen sich alle Spieler neue Schlittschuhe, wobei 20% der Spieler den sehr teuren Schlittschuh „Spirit“ wählen. 90% der Spieler, die „Spirit“ tragen, bekommen keine Blasen an den Füßen. Insgesamt erhalten 28% der Spieler Blasen an den Füßen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Spieler, der keine Blasen hat, nicht „Spirit“ trägt. (6 BE)
- 4 Die Mannschaft benutzt den Schlägertyp „Battle“. Aus Erfahrung weiß man, dass 12% dieses Schlägertyps eine zu geringe Qualität aufweisen. Berechnen Sie **ohne CAS**, wie viele Schläger der Verein mindestens bestellen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens 150 Schläger eine ausreichende Qualität haben. (8 BE)
- 5 Der Verein hat den Verdacht, dass der Anteil der Schläger „Battle“ mit zu geringer Qualität höher als 12% ist. In einem Test werden 300 Schläger auf dem Signifikanzniveau von 5% auf ihre Qualität überprüft. Verwenden Sie jeweils die Normalverteilung als Näherung.
  - 5.1 Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie **ohne CAS** den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. (7 BE)
  - 5.2 Erklären Sie, was man bei dem vorliegenden Test unter dem Fehler zweiter Art versteht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn in Wirklichkeit 16% der Schläger von zu geringer Qualität sind und die Nullhypothese bis 45 von 300 Schlägern mit schlechter Qualität angenommen wird. (5 BE)

## B II mit CAS

- 1 Im Labor eines pathologischen Instituts arbeiten 17 Frauen und 3 Männer. An einem Morgen kommen alle 20 Laborangestellten nacheinander zur Arbeit.
- 1.1 Berechnen Sie, wie viele verschiedene Reihenfolgen es für die Laborangestellten bei der Ankunft gibt, wenn man nur nach Geschlecht unterscheidet. (2 BE)
- 1.2 Den 20 Laborangestellten stehen 22 Spinde zur Verfügung, wobei jeder Angestellte nach seiner Ankunft zufällig einen noch freien Spind auswählt und belegt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Spind ausgewählt wird, ist für alle Spinde gleich groß. Die Spinde sind von 1 bis 22 durchnummeriert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Spinde mit den Nummern 1 und 2 frei bleiben. (3 BE)
- 2 Im Labor gibt es einen Automaten, der Objektträger mit Plastikfolie versiegeln soll. Der Sensor in diesem sogenannten Eindeckautomaten erkennt manchmal einzelne Objektträger nicht, so dass die nicht erkannten Objektträger nicht versiegelt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Objektträger den Eindeckautomaten unversiegelt verlässt, beträgt 0,01.
- 2.1 An einem Tag durchlaufen 2000 Objektträger nacheinander den Eindeckautomaten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:  
A: „Von den 2000 Objektträgern werden genau 20 nicht versiegelt.“  
B: „Der zwanzigste Objektträger ist der erste nicht versiegelte.“  
C: „Spätestens der zwanzigste Objektträger ist der erste nicht versiegelte.“  
D: „Von den 2000 Objektträgern werden mindestens 15 und höchstens 25 nicht versiegelt.“ Verwenden Sie für D die Normalverteilung als Näherung. (10 BE)
- 2.2 Berechnen Sie **ohne CAS**, wie viele Objektträger den Eindeckautomaten mindestens durchlaufen müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens 1000 Objektträger versiegelt werden. (8 BE)
- 3 Zwei Firmen A und B liefern Objektträger an das Labor des pathologischen Instituts. Von den Objektträgern der Firma A sind 2% fehlerhaft, von jenen der Firma B sind es 3%.
- 3.1 Von allen gelieferten fehlerhaften Objektträgern stammen  $\frac{2}{3}$  von der Firma A. Berechnen Sie, welchen Anteil die Objektträger der Firma A in der Gesamtlieferung ausmachen. (7 BE)
- 3.2 Von den am Morgen zur Verarbeitung bereitgestellten Objektträgern sind am Nachmittag noch 600 Objektträger übrig, die entweder alle von der Firma A oder alle von der Firma B stammen. Die Verpackung für die Objektträger wurde bereits entsorgt, so dass die Lieferfirma nicht mehr feststellbar ist.
- 3.2.1 Es wird folgende Entscheidungsregel festgelegt: Wenn von den 600 Objektträgern mindestens 15 fehlerhaft sind, dann werden die 600 Objektträger der Firma B zugeordnet, ansonsten der Firma A. Berechnen Sie **ohne CAS** die Wahrscheinlichkeit, mit der die 600 Objektträger fälschlicherweise der Firma B zugeordnet werden. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (5 BE)
- 3.2.2 Berechnen Sie, bis zu welchem Höchstwert der Anzahl von fehlerhaften Objektträgern man die 600 Objektträger der Firma A zuordnen kann, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Zuordnung der 600 Objektträger zur Firma A höchstens 10% betragen soll. (5 BE)