Fachabiturprüfung 2018 zum Erwerb der Fachhochschulreife an

Fachoberschulen und Berufsoberschulen

M A T H E M A T I K

Ausbildungsrichtung Technik

Freitag, 18. Mai 2018, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A: Analysis

A I

BE	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2-3}{e^x}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
5	1.1	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f an den Rändern der Definitionsmenge. Geben Sie Art und Gleichung der Asymptote des Graphen von f für $x \to \infty$ an.
9	1.2	Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen der Funktion f und ermitteln Sie damit die Art und die exakten Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-x^2+2x+3}{e^x}$]
5	1.3	Geben Sie die Nullstellen von f an und zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von f für $-2 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm.
5	1.4	Zeigen Sie, dass die Gerade t mit der Gleichung $t(x) = -\frac{5}{e^4} \cdot x + \frac{33}{e^4}$ die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 4$ ist. Zeichnen Sie außerdem diese Tangente in Ihre Zeichnung aus 1.3 ein.
6	1.5	Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und d so, dass F eine Stammfunktion von f ist: $F(x) = \frac{ax^2+bx+d}{e^x}$ mit $a, b, d \in \mathbb{R}$ und $D_F = D_f$. [Ergebnis: $F(x) = \frac{-x^2-2x+1}{e^x}$]
8	1.6	Im I. Quadranten wird von beiden Koordinatenachsen, dem Graphen von f und der Tangente t ein Flächenstück eingeschlossen. Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung von 1.3 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. (Hinweis: Die Graphen von t und f haben dabei in] 0; 4 [keine gemeinsamen Punkte.)
	1.7.0	Betrachtet wird nun die Funktion $h: x \mapsto \ln(f(x))$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$.
3	1.7.1	Ermitteln Sie mithilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse D_h.
3	1.7.2	Zeigen Sie mithilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse, dass die Funktion h genau eine Nullstelle besitzt, und geben Sie ein Intervall der Länge kleiner als 1 an, in dem diese Nullstelle liegt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		*Fortsetzung A I:*
4	1.7.3	Es gilt: $h'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ (Nachweis nicht erforderlich). Ermitteln Sie mithilfe bisheriger Ergebnisse ohne weitere Rechnung das Monotonieverhalten der Funktion h.
	2.0	Ein Tierarzt verabreicht einer Kuh ein Medikament, dessen Wirkstoff über das Blut auch in die Milch gelangt. Die Konzentration k des Medikaments in der Kuhmilch wird in $\frac{\text{mg}}{\ell}$ (Milligramm pro Liter) angegeben und kann näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden: $k : t \mapsto 5 \cdot t \cdot e^{\frac{1}{\lambda} \cdot t}$ mit $t, \lambda \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $\lambda < 0$. Dabei gibt t die Zeit in Stunden ab dem Verabreichen des Medikaments an. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf drei Nachkommastellen zu runden. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
3	2.1	Bestimmen Sie λ, wenn die Konzentration des Medikaments in der Milch 105 Minuten nach dem Verabreichen 4,88 $\frac{\text{mg}}{\ell}$ beträgt.
	2.2.0	Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $\lambda = -3$.
6	2.2.1	Bestimmen Sie, nach welcher Zeit t_{max} die Konzentration des Medikaments in der Milch der Kuh am größten ist. Geben Sie auch diese maximale Konzentration k_{max} an. [Mögliches Teilergebnis: $\dot{k}(t) = \left(5 - \frac{5}{3} \cdot t\right) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t}$]
5	2.2.2	Berechnen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens den Zeitpunkt t_a, zu dem die Konzentration des Medikaments in der Milch der Kuh auf 2 $\frac{\text{mg}}{\ell}$ abgesunken ist. Wählen Sie dabei als Startwert $t_0 = 10$ (Stunden) und führen Sie zwei Näherungsschritte durch.
4	2.2.3	Überprüfen Sie, ob sich die Konzentration des Medikaments in der Milch im Laufe der Zeit vollständig abbaut.
4	2.2.4	Die Funktion $L : t \mapsto (-15 \cdot t - 45) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t}$ mit $D_L = \mathbb{R}$ ist Stammfunktion der Funktion k in $[0;\infty[$ (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die mittlere Konzentration des Medikaments in der Milch innerhalb der ersten 8 Stunden nach Verabreichung des Medikaments.
70		

Aufgabengruppe A: Analysis

A II

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+x+1}{x+1}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
6	1.1	Untersuchen Sie f auf Nullstellen und bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f.
7	1.2	Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und ermitteln Sie damit die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{2x^2+4x}{(2x+2)^2}$]
4	1.3	F ist eine Stammfunktion von f mit $D_F =]-1;\infty[$. Ihr Graph sei G_F und verläuft durch den Ursprung. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von F durch Integration. [Mögliches Ergebnis: $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x+1)$]
8	1.4	Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f sowie seine Asymptoten in Farbe für $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie dann den Graphen G_F von F für $-1 < x \le 4$ in das Koordinatensystem ein. Maßstab: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$.
5	1.5	Die Graphen G_f und G_F schneiden sich genau einmal im I. Quadranten. Bestimmen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens einen Näherungswert für die Abszisse dieses Schnittpunktes auf zwei Nachkommastellen gerundet. Beginnen Sie mit dem Startwert $x_0 = 1{,}5$ und führen Sie einen Näherungsschritt durch. [Ergebnis: $x_1 \approx 1{,}37$]
3	1.6	Zeigen Sie, dass die Funktion $H: x \mapsto \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x+1)\cdot\ln(x+1)$ mit $D_H = D_F$ eine Stammfunktion von F ist.
6	1.7	Die Graphen G_f und G_F schließen im I. Quadranten zusammen mit der y-Achse ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung. Berechnen Sie anschließend die Maßzahl des zugehörigen Flächeninhaltes auf zwei Nachkommastellen gerundet.
	2.0	Gegeben ist die Schar der Funktionen f_k durch $f_k: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+k\cdot x+k}{x+k}$ mit $k \in \mathbb{R}$ in ihrem maximalen Definitionsbereich $D_{f_k} \subset \mathbb{R}$. Die Graphen werden mit G_{f_k} bezeichnet.
5	2.1	Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D_{f_k} an und bestimmen Sie die Art der Definitionslücke in Abhängigkeit von k.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	*Fortsetzung A II:*	
	2.2.0	Im Folgenden sei $k \neq 0$.
4	2.2.1	Bestimmen Sie ohne Zuhilfenahme einer Ableitungsfunktion alle Werte für k, für die ein Extrempunkt des Graphen G_{f_k} auf der x-Achse liegt.
6	2.2.2	Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme einer Ableitungsfunktion k so, dass der Graph G_{f_k} bei $x = 0$ eine waagrechte Tangente besitzt.
	3.0	Ein Tierarzt wurde in ein Waldstück gerufen, um zu helfen, die Wilderei an einem Wildtier aufzuklären, das dort geschossen und aufgefunden wurde. Zur Klärung des Delikts soll der Tatzeitpunkt ermittelt werden. Hierfür spielt folgender funktionaler Zusammenhang eine wichtige Rolle: $L: t \mapsto T + (L_0 - T) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$; $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dabei ist λ der Abkühlungskoeffizient, T die Umgebungstemperatur in °C, L die Körpertemperatur des erlegten Wildtieres in °C zum Zeitpunkt t und L_0 die gemessene Körpertemperatur des erlegten Wildtieres zum Zeitpunkt t_0, an dem der Tierarzt die Temperatur erstmals gemessen hat. Die Variable t beschreibt die vergangene bzw. vorausgegangene Zeit in Stunden bezüglich des Zeitpunktes t_0. Die Umgebungstemperatur von 4,0 °C wird dabei als konstant angenommen. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf drei Nachkommastellen zu runden.
5	3.1	Die Körpertemperatur des erlegten Wildtieres betrug $L_0 = 18{,}6$ °C zum Zeitpunkt t_0. Zum Zeitpunkt $t_1 = 1{,}0$ h war die Körpertemperatur bereits auf $L_1 = 15{,}9$ °C gefallen. Berechnen Sie den Wert für λ und geben Sie die Einheit von λ an.
	3.2.0	Im Folgenden sei $\lambda = 0{,}204$.
5	3.2.1	Es gibt zwei verdächtige Personen, die jedoch vorgeben, nichts mit der Wilderei zu tun zu haben. Der erste Verdächtige hat für die letzten 3 Stunden und der zweite Verdächtige für die letzten 5 Stunden vor t_0 kein Alibi. Zu früheren Zeitpunkten haben beide Verdächtige ein stichhaltiges Alibi. Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Abschusses in Bezug auf den Zeitpunkt t_0, wenn bei lebenden Wildtieren dieser Art zu dieser Jahreszeit von einer normalen Körpertemperatur von 37,0 °C ausgegangen wird. Entscheiden Sie daraufhin, ob die beiden Verdächtigen unter diesen Annahmen immer noch als Täter infrage kommen würden.
6	3.2.2	Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem die Abkühlrate des erlegten Wildtieres mehr als ein Grad Celsius pro Stunde beträgt bzw. betragen würde. Hinweis: Abkühlrate $< -1{,}0$ °C/h.
70		

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und analytische Geometrie

B I

BE		
	1.0	Im $\mathbb{R}^3$ sind die drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gegeben. Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, möglich oder immer falsch sind.
2	1.1	$\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| > 0$
2	1.2	$\vec{a}\circ\vec{b} = 0$
2	1.3	$\left\|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\circ\vec{c}\right\| = \left\|\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\circ\vec{b}\right\|$
2	1.4	Es existiert eine Ebene, in der alle drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen.
2	1.5	Es gibt einen Vektor im $\mathbb{R}^3$, der sich nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden lässt.
	2.0	Ein Speichenreflektor für ein Fahrrad beruht auf dem Prinzip eines Tripelspiegels. Dieser reflektiert einfallende Strahlung unabhängig von seiner Ausrichtung weitgehend zurück zur Strahlungsquelle. Erreicht wird dieser Effekt durch drei ebene Spiegel, die aufeinander senkrecht stehen. Die drei Koordinatenebenen des $\mathbb{R}^3$ mit den Gleichungen in Koordinatenform E_{23}: $x_1 = 0$, E_{13}: $x_2 = 0$ und E_{12}: $x_3 = 0$ bilden zusammen einen derartigen Tripelspiegel.
4	2.1	Ein vom Punkt $A(7\mid 12\mid 2)$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ausgehender Lichtstrahl trifft im Punkt S auf die Ebene E_{12}. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade g_0 an, auf welcher der Lichtstrahl verläuft. Zeigen Sie, dass gilt: $S(5\mid 8\mid 0)$.
6	2.2	Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g_1, auf der der an der Ebene E_{12} reflektierte Strahl verläuft. [Mögliches Ergebnis: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$]
5	2.3	Zeigen Sie rechnerisch, dass bei der Reflexion des Lichtstrahls an E_{12} der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist.
5	2.4	Berechnen Sie den Abstand von g_1 zur Ecke des Tripelspiegels, die sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet.
30		

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und analytische Geometrie

B II

BE		
	1.0	Ein Hotel wurde in Form einer vierseitigen Pyramide mit gleich großen gläsernen Seitenflächen gebaut. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ stellen die Punkte $A(2\|1\|3)$, $B(2\|31\|3)$, $C(-28\|31\|3)$ und $D(-28\|1\|3)$ die Eckpunkte der Grundfläche und der Punkt $S(-13\|16\|30)$ die Spitze der Pyramide dar. In der Nähe des Hotels befindet sich ein Kanal, dessen Uferlinie in einem bestimmten Bereich geradlinig verläuft und modellhaft durch die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 27 \\ -24 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$ beschrieben werden kann. Alle Koordinaten sind in der Einheit Meter angegeben. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
4	1.1	Zeigen Sie, dass die Grundfläche $ABCD$ des Hotels quadratisch ist.
4	1.2	Die Kante $\overline{AB}$ des Hotels liegt auf der Geraden s. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden s auf und zeigen Sie, dass s echt parallel zur Geraden g verläuft.
4	1.3	Die Grundfläche $ABCD$ der Pyramide und die Gerade g liegen in der Ebene E. Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Ebene E in Parameter- sowie in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem. [Mögliches Teilergebnis: $E: -x_3 + 3 = 0$]
4	1.4	Eine Reinigungsfirma wird mit der fachgerechten Reinigung der gläsernen Seitenflächen des Hotels beauftragt. Berechnen Sie die Mantelfläche der Pyramide und ermitteln Sie die Kosten der Reinigung auf Euro gerundet, wenn für $1\,m^2$ gereinigte Fläche 5 Euro veranschlagt werden.
3	1.5	Ein Fassadenkletterer befindet sich auf der Kante $\overline{BS}$ der Pyramide. Berechnen Sie den Neigungswinkel der Kante $\overline{BS}$ zur Grundfläche $ABCD$. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.
5	1.6	Für Werbezwecke soll von der Spitze S des Hotels auf kürzestem Weg zur nahen Uferlinie des Kanals eine Lichterkette gespannt werden. Berechnen Sie die Mindestlänge der Lichterkette auf Meter gerundet.
6	1.7	Ein Kanal-Passagierschiff passiert nachts das Hotel. Vom Punkt $Q(27\|-3\|3)$ wird vom Schiff ein Lichtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -30 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}$ gesendet. Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl die gläserne Seitenfläche ABS des Hotels trifft.
30		