Fachabiturprüfung 2018

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

M A T H E M A T I K

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Ersatztermin

Freitag, 18. Mai 2018, 9.00 – 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und S zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.

A I

1.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit. (3 BE)

1.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie Art und Koordinaten des Extrempunktes des Graphen G_f. (7 BE)

1.3 Bestimmen Sie die Gleichungen aller Wendetangenten an den Graphen G_f. (8 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich $-1 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Für weitere Teilaufgaben wird auf der y-Achse der Bereich $-3 \le y \le 3$ benötigt. Maßstab: 1 LE = 1cm. (4 BE)

2.0 Betrachtet wird weiter die quadratische Funktion p mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_p bezeichnet.

2.1 Die Parabel G_p berührt den Graphen G_f aus 1.0 im Punkt $B(3\,|\,3)$ und verläuft durch den Koordinatenursprung. Bestimmen Sie $p(x)$ und zeichnen Sie die Parabel G_p im Bereich $-1 \le x \le 4$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (8 BE)

[Mögliches Ergebnis: $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$]

2.2 Die Graphen G_f und G_p schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein.
Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. (5 BE)

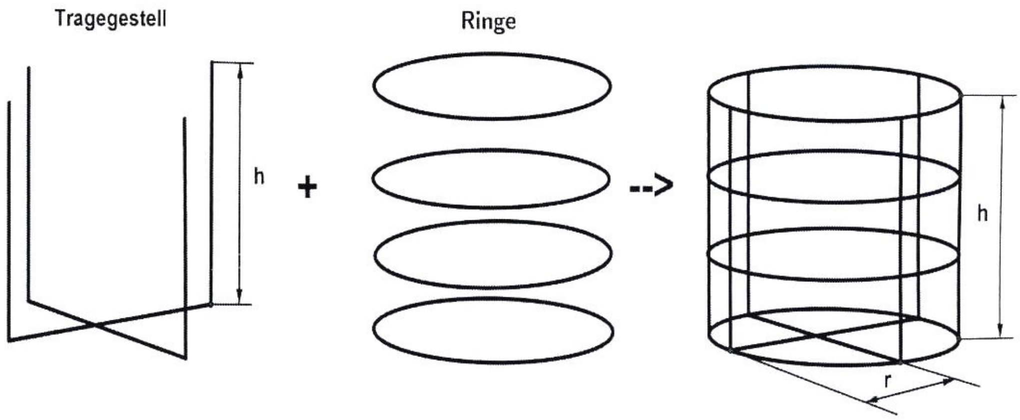
2.3 Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Schnittpunkts der Graphen G_f und G_p, der im III. Quadranten des Koordinatensystems liegt. (7 BE)

2.4 Bestimmen Sie die Steigungen der beiden Geraden durch den Punkt $T(3\,|\,4)$, die den Graphen G_p berühren. (6 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A I

3.0 Ein Bastler möchte sich mithilfe folgender Bauanleitung das Grundgerüst für einen zylinderförmigen Abfallkorb mit Höhe h und Radius r (alle Längen in Meter gemessen) aus Draht bauen (siehe Skizze).



Für das Vorhaben kauft er sich Draht mit der Länge 6 m. Die Einzelteile werden selbst hergestellt und zusammengelötet. Die Dicke des Drahts ist zu vernachlässigen. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

3.1 Bestimmen Sie die Maßzahl $V(r)$ des Volumens des Abfallkorbs in Abhängigkeit von r.

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = \pi\left(\frac{3}{2}r^2 - r^3 - 2\pi r^3\right)$] (5 BE)

3.2 Aus praktischen Gründen wird für die Funktion
$V: r \mapsto V(r)$ als Definitionsmenge $D_V = [0{,}1;\ 0{,}2]$ gewählt.

Berechnen Sie den Radius r des Abfallkorbs für den Fall, dass die Maßzahl des Volumens ihren absolut größten Wert annimmt.
Runden Sie Ihr Ergebnis auf drei Nachkommastellen. (7 BE)

A II

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{5}(x^4 - 8x^3 + 18x^2)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f bezüglich des Koordinatensystems und geben Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$ an. (3 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion f genau eine Nullstelle besitzt und geben Sie diese samt Vielfachheit an. (3 BE)

1.3 Begründen Sie nur mithilfe der Ergebnisse aus 1.1 und 1.2, dass an der Stelle $x = 0$ ein relatives und zugleich absolutes Minimum von f vorliegen muss. (3 BE)

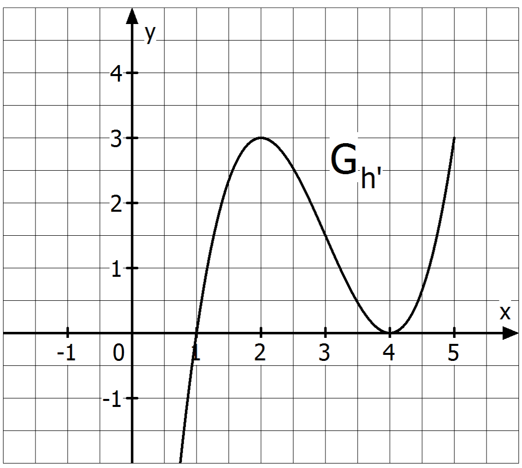
1.4 Zeigen Sie, dass an den Stellen $x = 1$ und $x = 3$ Wendestellen von f liegen. Ermitteln Sie auch die Koordinaten der zugehörigen Punkte und welcher der beiden Punkte ein Terrassenpunkt ist. (7 BE)

1.5 Die Wendepunkte aus Teilaufgabe 1.4 legen die Gerade G_g fest. Ermitteln Sie deren Gleichung. (3 BE)

1.6 Zeichnen Sie die Graphen G_f und G_g unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich $-1 \le x \le 4{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm. (5 BE)

1.7 Die Graphen G_f und G_g schließen drei endliche Flächenstücke ein. Schraffieren Sie das mittlere Flächenstück in Ihrer Zeichnung von Aufgabe 1.6 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhaltes. (5 BE)

2 Gegeben ist der Graph der 1. Ableitung h' der Funktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.



Bestätigen oder widerlegen Sie begründet folgende Aussagen:

a) G_h hat einen Tiefpunkt bei $x = 1$.

b) G_h hat einen Tiefpunkt bei $x = 4$.

c) G_h hat einen Wendepunkt bei $x = 2$.

d) Die Tangente an den Graphen G_h in $x = 2$ verläuft parallel zur Geraden e mit der Gleichung $y = 3x + 7$. (8 BE)

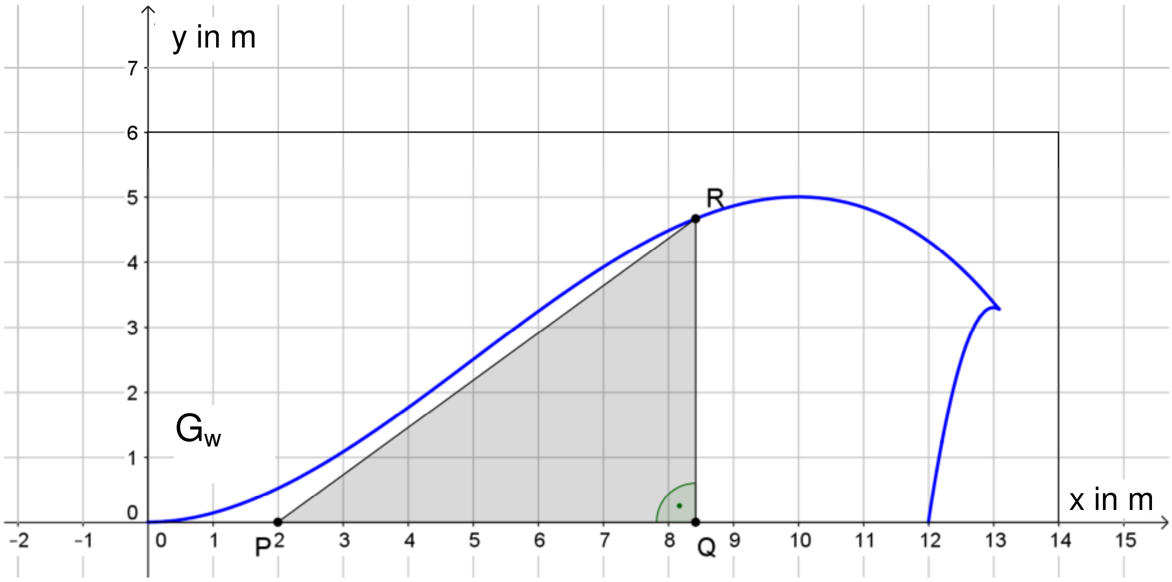
Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

3 Gegeben sind die reellen Funktionen $k_a : x \mapsto \frac{1}{9}(x^4 - 2ax^3)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$.

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte der zugehörigen Graphen G_{k_a} in Abhängigkeit von a. (9 BE)

4.0 Auf der Außenwand eines neuen Hallenbades soll dessen Logo, eine Welle, abgebildet werden. Der Architekt möchte ein großes Fenster in Form eines rechtwinkligen Dreiecks (siehe Skizze $\triangle PQR$) innerhalb der Welle anbringen.



Das Fenster soll am Punkt $P(2|0)$ beginnen. Seine Breite $|\overline{PQ}|$ soll mindestens 5 m und höchstens 10 m betragen. Der Punkt R soll auf der oberen Begrenzungslinie (Graph G_w) der Welle liegen, welche durch die Funktion $w : x \mapsto -0{,}01x^3 + 0{,}15x^2$ beschrieben wird. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

4.1 Zeigen Sie, dass die Maßzahl A der Fläche des Fensters abhängig von der x-Koordinate des Punktes Q durch die Funktionsgleichung $A(x) = 0{,}005\,(-x^4 + 17x^3 - 30x^2)$ beschrieben wird, und geben Sie für die Funktion A einen Definitionsbereich D_A an, der den Vorgaben von 4.0 entspricht. (5 BE)

4.2 Der Architekt möchte das Hallenbad möglichst hell gestalten. Aus diesem Grund soll die Fläche des Fensters möglichst groß sein. Bestimmen Sie die x-Koordinate des Punktes Q, für welche die Maßzahl der Fläche A maximal wird. Berechnen Sie für diesen Fall Breite, Höhe und Fläche des Fensters. Ermitteln Sie den prozentualen Anteil der Fensterfläche an der Logofläche, wenn diese $36\,\text{m}^2$ beträgt. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. (9 BE)

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Der Pizzalieferdienst „Happy-Pizza“ feiert sein 10-jähriges Firmenjubiläum und bietet dazu seine Pizzen in den Größen klein (K), normal (N) und XXL (X) zu besonders günstigen Preisen an. Ein Fünftel der Kunden entscheidet sich für die kleine Pizza und nur jeder zehnte Kunde für die XXL-Größe. Zu jeder Pizza kann man einen Salat (S) dazu bestellen. Unabhängig von der Wahl der Pizzagröße entscheiden sich 30% für den Salat.
Um die XXL-Pizza stärker zu bewerben bekommt man dazu gratis ein kleines Getränk (G) oder ein Dessert (D). Die Entscheidung für ein Dessert ist unabhängig davon, ob ein Salat bestellt wird.
Es ist bekannt, dass 1% aller Kunden eine XXL-Pizza mit Salat und Dessert bestellen.
Eine Pizza-Aktionsbestellung eines zufällig ausgewählten Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. (6 BE)

1.2 Es werden folgende Ereignisse definiert:

E_1 : „Ein Kunde erhält ein Gratisgetränk.“

$E_2 = \{KS; NS; XSG; XSD\}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an, formulieren Sie E_2 möglichst einfach in Worten und geben Sie seine Wahrscheinlichkeit an. (3 BE)

2.0 Von den in 1.0 angegebenen Bestellvarianten kostet die kleine Pizza 5 €, die Pizza in Normalgröße 7 € und die XXL-Variante 10 €. Ein Salat kostet 3 €. Die Zufallsgröße X beschreibt die Kosten pro Bestellung.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und stellen Sie diese geeignet graphisch dar. (6 BE)

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kosten pro Bestellung innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (5 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S I

3 Nach 1.0 beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine XXL-Pizza bestellt wird, $p = 0{,}1$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass bei 50 Bestellungen

E_3: „genau 40 Kunden keine XXL-Pizza bestellen.“

E_4: „mehr als 5 Kunden eine XXL-Pizza bestellen.“

E_5: „mindestens 2 aber höchstens 8 Personen eine XXL-Pizza bestellen.“ (5 BE)

4 Marlene, Martin, Max, Michael und Moritz wählen jeweils ihre Lieblingspizza und bestellen gemeinsam bei „Happy-Pizza“. Nach der Lieferung der 5 unterschiedlichen Pizzen sucht sich zunächst Marlene ihre vegetarische Pizza heraus. Anschließend wählen die vier Jungs nacheinander zufällig einen der übrigen, noch geschlossenen Pizzakartons aus.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit nun alle ihre bestellte Pizza erhalten. (2 BE)

5.0 Der Organisator der Werbeaktion aus 1.0 vermutet, dass aufgrund der Aktion mehr als 10% XXL-Pizzen verkauft werden (Gegenhypothese). Zur Überprüfung der Vermutung wird ein Hypothesentest durchgeführt, der auf den nächsten 100 Pizzabestellungen beruht.

5.1 Geben Sie zu diesem Test die Testgröße und die Nullhypothese an und bestimmen Sie auf dem 5%-Niveau den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. (5 BE)

5.2 Erklären Sie, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht. (2 BE)

6.0 Ein anderer Pizzalieferdienst bietet neben Pizzen auch noch Nudelgerichte (N) an. Aus Erfahrung weiß man, dass 28% aller Kunden Nudelgerichte (N) bestellen, die Restlichen eine Pizza ($\overline{N}$). Bei 3 von 10 Bestellungen wird zusätzlich Salat (S) geordert und bei der Hälfte aller Bestellungen lediglich eine Pizza.

6.1 Bestimmen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde eine Pizza ($\overline{N}$) mit Salat (S) bestellt. (3 BE)

6.2 Zeigen Sie, dass für die Ereignisse N und S gilt: $P(N \cap S) \neq P(N) \cdot P(S)$. Deuten Sie das Ergebnis. (3 BE)

S II

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Bei einem internationalen Fußballwettbewerb überlegt der Veranstalter schon im Vorfeld, aus welchen Gruppen sich die Besucher in den Stadien zusammensetzen. Man rechnet mit 60% fanatische Anhänger (F) der jeweiligen Mannschaften. Die restlichen Besucher sind neutral (N). Die Hälfte aller Personen in den Stadien wird wohl Alkohol trinken (A). Ohne Alkoholgenuss geht man bei 2% der Besucher von einer gewissen Gewaltbereitschaft (G) aus. Durch Alkoholgenuss verfünffacht sich diese Wahrscheinlichkeit.
Zu welcher der verschiedenen Kategorien eine beliebig herausgegriffene Person im Stadion zählt, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. (5 BE)

1.2 Es werden folgende Ereignisse definiert:
E_1 : „Ein zufällig ausgewählter Besucher trinkt keinen Alkohol."
E_2 : „Die Person ist fanatisch und friedlich oder neutral und gewaltbereit."
Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und prüfen Sie sie auf stochastische Unabhängigkeit. (5 BE)

1.3 Geben Sie in Mengenschreibweise ein Ereignis E_3 an, das unvereinbar mit E_1 ist und dessen Wahrscheinlichkeit 42% von $P(E_1)$ beträgt. (2 BE)

2 Während der gesamten Spiele sind 400 Fußballer im Einsatz. 80% von ihnen werden erfahrungsgemäß in Zweikämpfen in regelwidrigen Körperkontakt mit dem Gegner kommen (K). 180 Spieler bekommen eine gelbe Karte als Verwarnung (V), zwei Drittel davon im Zusammenhang mit einem unerlaubten Körperkontakt.
Stellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständige Vierfeldertafel auf, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = \overline{K \cup \overline{V}}$ und interpretieren Sie E_4 im Sinne der vorliegenden Thematik. (5 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S II

3.0 Die Zufallsgröße X gibt die Tordifferenz bei den Spielergebnissen im Turnier an. Unter Vernachlässigung von Tordifferenzen größer als fünf ergibt sich mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,5	2b	a	$5b - 0,4$	$2a - 0,24$	0,02

3.1 Berechnen Sie die Parameter a und b, wenn $P(X \leq 2) = 0,84$ gilt, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar. (7 BE)
[Teilergebnis: $a = 0,14$]

3.2 Berechnen Sie mit den Werten für a und b aus Aufgabe 3.1, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (5 BE)

4 Beim Elfmeterschießen erzielen die Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,75$ tatsächlich ein Tor. Es werden nun 10 Elfmeter betrachtet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_5: „Mehr als 3, aber weniger als 8 Schützen erzielen ein Tor."
E_6: „Nur die ersten 4 oder nur die letzten 4 Elfmeter ergeben ein Tor." (4 BE)

5.0 Die Fehlerquote bei Entscheidungen der eingesetzten Schiedsrichter soll höchstens 12,5% betragen. Bei einem der jüngeren Schiedsrichter vermutet man aber einen höheren Anteil (Gegenhypothese). In nächster Zeit werden deshalb 200 seiner Entscheidungen auf Fehler hin untersucht.

5.1 Geben Sie zu diesem Test Testgröße und Nullhypothese an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. (5 BE)

5.2 Erläutern Sie im Sachzusammenhang, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht. (2 BE)