Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2018

Prüfungsfach:	Mathematik (nichttechnische Ausbildungsrichtungen)
Prüfungstag:	Donnerstag, 14. Juni 2018
Prüfungsdauer:	9:00 Uhr – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner; Merkhilfe Mathematik (Technik)
Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule. Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.
Bewertungsschlüssel:	

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

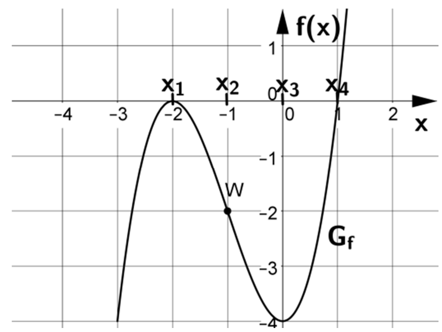
Aufgabe I

BE

1.1 Im Folgenden sind fünf Aussagen zu ganzrationalen, auf der Menge $\mathbb{R}$ definierten Funktionen aufgeführt. 5
Geben Sie für jede Aussage an, ob diese wahr oder falsch ist.

a) Die erste Ableitung eines Polynoms 5. Grades ist immer ein Polynom 4. Grades.
b) Der Graph eines Polynoms 4. Grades hat immer einen Wendepunkt.
c) Zwischen zwei relativen Extrempunkten des Graphen einer Funktion befindet sich immer mindestens ein Wendepunkt des Graphen.
d) Zwischen zwei Wendepunkten des Graphen einer Funktion liegt immer ein relativer Extrempunkt des Graphen.
e) Eine Polynomfunktion 3. Grades besitzt immer mindestens eine Nullstelle.

1.2.0 Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen der ganzrationalen Funktion f vom Grad 3. Der Wendpunkt des Graphen lautet $W(-1|-2)$.



1.2.1 Treffen Sie qualitative Aussagen in der Art „<0 oder >0 oder $=0$“ über die Funktionswerte von f, f' und f'' jeweils an den Stellen x_1 bis x_4. 6

1.2.2 Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms den Funktionsterm von f. Setzen Sie dazu den Term in vollständig faktorisierter Form an. 3

1.3.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x) = 0{,}1\left(3x^3 - 4{,}5x^2 - 18x + 30\right)$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. Der Wendepunkt von G_f befindet sich an der Stelle $x_W = 0{,}5$.

1.3.1 Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen. 4

1.3.2 Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte mindestens für $-2{,}5 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 3

1.3.3 Der Graph von f schließt im I. Quadranten des Koordinatensystems mit den Koordinatenachsen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhaltes. 4

25

Aufgabe II

BE

2.0 Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 3 enthält den Punkt $P(0|-2)$ sowie den Wendepunkt $W(2|0)$. Die Wendenormale hat die Gleichung $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$. Die Wendenormale G_n ist diejenige Gerade, welche auf der Wendetangente von G_f senkrecht steht und durch den Wendepunkt von G_f verläuft. Für die Steigung m_t der Wendetangente und die Steigung m_n der Wendenormale gilt folgender Zusammenhang: $m_n \cdot m_t = -1$.

2.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ von f. — 6
[mögliches Ergebnis: $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$]

2.2 Ermitteln Sie alle Nullstellen der Funktion f. — 4

2.3 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f und ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. — 5

2.4 Die Gerade G_g hat eine positive Steigung und schneidet den Graphen der Funktion f im Punkt $S(4|2)$. Sie schließt mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein. Ermitteln Sie die Gleichung dieser Geraden. — 2
[mögliches Ergebnis: $y=x-2$]

2.5 Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte sowie die Gerade G_g aus Aufgabe 2.4 mindestens für $0 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. — 4

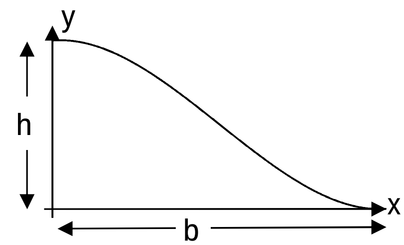
2.6 G_f und G_g schließen im I. und IV. Quadranten zwei endliche Flächenstücke ein. Schraffieren Sie diese in der graphischen Darstellung aus Aufgabe 2.5 und weisen Sie nach, dass beide Flächenstücke inhaltsgleich sind. — 4

25

Aufgabe III

BE

3.0 Im Vorfeld des Baus einer Rutschbahn in einem Hallenbad wird von der Rutsche eine Planungsskizze angefertigt (siehe nebenstehende Skizze). Diese zeigt die Wasserrutsche in einer Seitenansicht. Für die Maße h und b in der Skizze gilt: $h = 9{,}6\,\text{m}$ und $b = 20\,\text{m}$. Das durchschnittliche Gefälle der Rutsche zwischen Ein- und Ausstieg der Bahn beträgt 48 %. Außerdem sollen die gedachten Tangenten an die Bahn im Ein- und Ausstieg horizontal verlaufen. Ein Koordinatensystem wird wie in der Planungsskizze ersichtlich festgelegt.
Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen soll verzichtet werden.



3.1 In der Planungsskizze wird die Rutschbahn durch den Graphen G_f dargestellt, welcher durch die Funktion f auf D_f beschrieben wird. Die Funktionsgleichung von f lautet $f(x) = 0{,}0024x^3 - 0{,}072x^2 + 9{,}6$.
Zeigen Sie, dass alle unter 3.0 genannten Vorgaben an die Rutschbahn in diesem Modell eingehalten werden. Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich D_f der Funktion f zum vorliegenden Sachzusammenhang an. 6

3.2 Das Gefälle der Rutschbahn soll an keiner Stelle 75 % überschreiten.
Überprüfen Sie, ob dies gewährleistet ist. 5

3.3 Unter der Rutschbahn werden zur Stabilisierung gerade Stützen senkrecht zum Boden eingebaut. Eine dieser Stützen ist 7,50 Meter hoch. 7
Zeigen Sie zunächst, dass sich die Gleichung $x^3 - 30x^2 + 875 = 0$ zur Berechnung der Verankerungsstelle x_S dieser Stütze im Boden eignet.
Eine Lösung dieser Gleichung lautet $x_1 = -5$. Diese Lösung hat allerdings keine praktische Bedeutung, da x_1 nicht im sinnvoll gewählten Definitionsbereich der Funktion f liegt.
Berechnen Sie mithilfe der gegebenen Informationen die Verankerungsstelle x_S auf cm genau.

3.4 Für den Aufstieg zum Einstieg der Rutschbahn ist eine Treppe geplant, die sich in obiger Planungsskizze als Geradenstück mit einem Steigungswinkel von 45° darstellen würde. Berechnen Sie die Länge dieser Treppe auf cm genau. 2

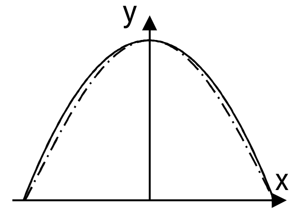
3.5 Zur Einweihung der Rutschbahn wird ein Tag der offenen Tür stattfinden. Für diesen Anlass soll eine Werbeplane angefertigt werden, die den gesamten Bereich unterhalb der Rutschbahn auskleiden soll. Dieser Bereich ist in der Planungsskizze das Flächenstück, welches von G_f und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird. Ermitteln Sie die anfallenden Kosten, wenn der Preis der Plane $7{,}50\frac{€}{m^2}$ beträgt. 5

25

Aufgabe IV

BE

4.0 Ingenieure planen den Bau eines neuen Tunnels. Die nebenstehende Abbildung zeigt schematisch einen Querschnitt durch diesen Tunnel mit zwei möglichen oberen Begrenzungslinien. Auf dem Tunnelboden soll eine Fahrbahn asphaltiert werden. Für die nachfolgende Beschreibung der oberen Begrenzungslinie des Tunnelquerschnittes mithilfe von ganzrationalen Funktionen wird ein Koordinatensystem wie in der Abbildung ersichtlich festgelegt. Die y-Achse ist dabei die Symmetrieachse für den im Koordinatensystem achsensymmetrischen Tunnelquerschnitt. Die Ingenieure schlagen zwei konkrete Modellfunktionen f und p vor, die nachfolgend durch ihre Funktionsgleichungen gegeben sind: $f(x) = 0{,}00256x^4 - 0{,}32x^2 + 6{,}4$ und $p(x) = -0{,}256x^2 + 6{,}4$.
Die Werte der Variablen x und die Funktionswerte $f(x)$ und $p(x)$ stellen dabei Längenangaben in der Einheit Meter dar. Auf die Mitführung von Einheiten wird in den nachfolgenden Rechnungen verzichtet.



4.1 Weisen Sie nach, dass unabhängig davon, welche der beiden Modellfunktionen zur Beschreibung der oberen Begrenzungslinie des Tunnelquerschnittes herangezogen wird, der Tunnel die gleiche Tunnelbreite b und die gleiche maximale Tunnelhöhe h aufweist. Geben Sie für die Funktionen f und p jeweils im vorliegenden Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmengen D_f und D_p sowie die sich damit ergebenden Wertemengen W_f und W_p an. 6

4.2 Die beiden Modellfunktionen beschreiben die Höhe des Tunnels in Abhängigkeit des Standortes auf dem Tunnelboden unterschiedlich. Ein Ingenieur behauptet, dass die Differenz der entsprechenden Höhen bei beiden Tunnelmodellen stets kleiner als 50 cm sei. Überprüfen Sie durch Rechnung, ob diese Aussage zutrifft. 7

4.3 Damit der Sauerstoffgehalt in der Luft im Tunnel die vorgeschriebene Mindest-konzentration nicht unterschreitet, muss der Tunnel belüftet werden. Für die Wahl eines passenden Umwälzpumpensystems werden die beiden möglichen Volumina des Tunnels verglichen. Die Länge des Tunnels beträgt 300 Meter. Berechnen Sie das Verhältnis zwischen den Luftvolumina im „f-Tunnel“ und „p-Tunnel“. 6

4.4.0 Das Team der Ingenieure entscheidet sich zur Festsetzung der oberen Begrenzungslinie des Tunnelquerschnittes für die Funktion p. Die beiden Fahrspuren müssen jeweils mindestens drei Meter breit sein. Weiterhin muss gewährleistet sein, dass die Tunnelhöhe an den beiden Rändern der asphaltierten Fahrbahn mindestens 3,5 m beträgt.

4.4.1 Ermitteln Sie die maximal mögliche Breite der beiden Fahrspuren in diesem Tunnel. 3

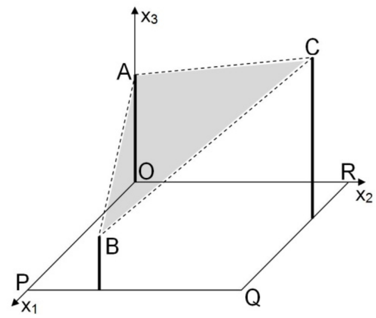
4.4.2 Die Fahrbahn im Tunnel soll mit einer Gesamtbreite von 6 Metern realisiert werden. Unmittelbar neben den Fahrstreifen beginnend sollen Fußgängernotwege eingerichtet werden. Berechnen Sie die maximale Breite dieser Notwege auf jeder Seite, wenn die Tunnelhöhe innerhalb dieser Notwegekorridore nirgendwo 2 Meter unterschreiten soll. 3

25

Aufgabe V

BE

5.0 Ein Kindergarten möchte über seinem quadratischen Sandkasten ein dreieckiges Sonnensegel anbringen.
Die Eckpunkte des Sandkastens sind die in der x_1-x_2-Ebene liegenden Punkte O, P, Q und R.
Q hat die Koordinaten $Q(6|6|0)$.
Das Sonnensegel wird von vertikalen Stützen straff gespannt gehalten. Die Koordinaten der oberen Endpunkte der Stützen lauten:
$A(0|0|3), B(6|2|1{,}5), C(2|6|4{,}5)$.
Die Koordinaten sind in der Längeneinheit Meter angegeben. Auf die Verwendung der Einheiten wird bei den Berechnungen verzichtet. Die Skizze ist nicht maßstäblich.



5.1 Zeigen Sie, dass das gespannte Sonnensegel mit den Eckpunkten A, B und C die Form eines gleichschenkligen Dreiecks besitzt. 3

5.2 Berechnen Sie das Maß des Winkels $\sphericalangle BAC$. 3

5.3 Ein Erzieher hängt in der Mitte der Strecke $\overline{BC}$ ein Windspiel auf. Das untere Ende des Windspiels soll mindestens den Abstand von 2,20 Meter vom Boden haben. Berechnen Sie die maximale Länge des Windspiels samt Aufhängeschnur. 3

5.4 Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Flächeninhalt des Sonnensegels ca. $18{,}1\,m^2$ beträgt. 5

5.5 Der Träger des Kindergartens hat ein Angebot vorliegen, welches einschließlich der Verpackungs- und Transportkosten für einen Quadratmeter des Sonnensegels 50 € und für einen Meter der Stützen 10 € veranschlagt. 3
Zeigen Sie rechnerisch, dass das vorhandene Budget des Kindergartenträgers in Höhe von 1000 € ausreicht, um die Kosten für den Kauf des Segels und der Stützen zu decken.

5.6.0 Vereinfachend wird angenommen, dass die Richtung der geradlinig und parallel verlaufenden Sonnenstrahlen um 12 Uhr mittags durch den Vektor

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

5.6.1 Berechnen Sie, welcher prozentuale Anteil der Bodenfläche des Sandkastens um 12 Uhr mittags durch das Sonnensegel beschattet wird. 5

5.6.2 Unterbreiten Sie den Verantwortlichen einen Vorschlag, wie sie mit dem vorliegenden Sonnensegel zur Mittagszeit mindestens die Hälfte des Sandkastenbodens beschatten könnten. 3

25