

Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2018

Prüfungsfach: **Mathematik**
(technische Ausbildungsrichtung)

Prüfungstag: **Donnerstag, 14. Juni 2018**

Prüfungsdauer: **9:00 Uhr – 12:00 Uhr**

Hilfsmittel: **Elektronischer, nicht programmierbarer**
Taschenrechner;
Merkhilfe Mathematik (Technik)

Hinweise: Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.
Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.
Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.
Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.

Bewertungsschlüssel:

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

Aufgabe I

BE

- 1.0** Gegeben ist die reelle Funktion f durch ihren Term $f(x)$ mit $f(x) = (x-2) \cdot \ln(0,1 \cdot (2x-4))$ auf der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.
- 1.1** Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_f der Funktion f und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ am rechten Rand der Definitionsmenge. 3
- 1.2** Ermitteln Sie alle Nullstellen der Funktion f . 3
- 1.3** Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_f . [mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = 1 + \ln(0,1 \cdot (2x-4))$] 7
- 1.4** Zeichnen Sie den Graphen von f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $2 < x \leq 11$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 4
- 1.5** Die Funktion F , gegeben durch ihren Term $F(x)$ mit
- $$F(x) = \frac{\left(2 \cdot \ln\left(\frac{x-2}{5}\right) - 1\right) \cdot (x-2)^2}{4},$$
- ist eine Stammfunktion der Funktion f (Nachweis ist nicht erforderlich). Der Graph G_f , die x -Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=5$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Schraffieren Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung von Aufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl A seines Flächeninhaltes.
- 1.6** Der Graph der Funktion f besitzt im Punkt $P(7|f(7))$ die Tangente t . Geraden, welche senkrecht auf dieser Tangente stehen, heißen Normalen. Zwischen der Steigung m_t der Tangente t und der Steigung m_n einer Normalen n gilt folgender Zusammenhang: $m_t \cdot m_n = -1$. Bestimmen Sie die Gleichung der Normale n , die durch den Punkt P verläuft und zeichnen Sie diese Gerade in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.4. 4

Aufgabe II

BE

- 2.0** Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 3}$ auf ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.
- 2.1** Geben Sie die Definitionsmenge D_f an und untersuchen Sie G_f auf mögliche Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Geben Sie ggf. die Koordinaten der Schnittpunkte an. 4
- 2.2** Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$ sowie in der Umgebung der Definitionslücke von f . Ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f . 5
[mögliches Zwischenergebnis: $f(x) = x - 1 + \frac{5}{x + 3}$]
- 2.3** Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph G_f streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt. Schließen Sie daraus auf die Existenz und die Art von relativen Extrempunkten von G_f . Bestimmen Sie ggf. die Koordinaten dieser Extrempunkte. 6
[mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 4}{(x + 3)^2}$]
- 2.4** Zeichnen Sie den Graph G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte sowie alle Asymptoten von G_f für $-8 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 5
(Maßstab: x-Achse: 1 LE = 1 cm; y-Achse: 1 LE = 2 cm)
- 2.5** Die Gerade g mit der Gleichung $y = 2$ schneidet den Graphen G_f in den beiden Punkten P und Q . Bestimmen Sie durch Rechnung die Koordinaten dieser Punkte und berechnen Sie anschließend die Maßzahl A des endlichen Flächenstücks, welches der Graph G_f und die Gerade g einschließen. 5

Aufgabe III

BE

- 3.0** Es wird der Ladevorgang eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand betrachtet. Die Funktion $Q: t \mapsto Q(t)$ mit $D_Q = [0; \infty[$ beschreibt die Ladungsmenge in Amperesekunden (As) auf den Kondensatorplatten in Abhängigkeit von der Ladezeit t in Sekunden (s).

$$Q(t) = 100 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ [As]}$$

τ hat für den betrachteten Kondensator den Wert $\tau = 4,7 \text{ s}$.

Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma. Die Einheiten sollen während der Rechnungen nicht mitgeführt werden.

- 3.1** Berechnen Sie die Ladungsmenge $Q(t_0)$ auf den Kondensatorplatten zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ des Ladevorgangs. 4
Nach hinreichend langen Ladezeiten ist der Kondensator „vollständig“ aufgeladen. Bestimmen Sie mithilfe des Grenzwertes $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ die Ladungsmenge, welche der Kondensator nach sehr langen Ladezeiten trägt.

- 3.2** Berechnen Sie den prozentualen Anteil der zum Zeitpunkt $t_1 = 5 \cdot \tau$ auf den Kondensatorplatten gespeicherten Ladung von der maximal möglichen Ladungsmenge auf den Kondensatorplatten. 2

- 3.3** Berechnen Sie den Zeitpunkt t_2 , bei dem der Kondensator 63,2 % der möglichen Gesamtladung trägt. 4

- 3.4** Die Funktion $I: t \mapsto I(t)$ beschreibt die Stärke des Ladestroms (in Ampere) während des Ladevorgangs des betrachteten Kondensators. Es gilt: $I(t) = \dot{Q}(t)$. 6
Ermitteln Sie den Term $I(t)$ der Funktion I .
Untersuchen Sie, zu welchem Zeitpunkt t_{\max} die Ladestromstärke während des Ladens des Kondensators maximal ist.
Berechnen Sie diese maximale Stromstärke $I(t_{\max})$.

- 3.5** Zeichnen Sie den Graphen G_I der Funktion I für $0 \leq t \leq 20 \text{ s}$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 5
(Maßstab: t -Achse $1 \text{ cm} \hat{=} 2 \text{ s}$, $I(t)$ -Achse $1 \text{ cm} \hat{=} 3 \text{ Ampere}$)

- 3.6** Zwischen den Zeitpunkten $t_3 = \tau$ und $t_4 = 2 \cdot \tau$ erhöht sich die Ladung auf den Kondensatorplatten um die Ladungsmenge ΔQ . 4
Erläutern Sie, wie der Wert dieser Ladungsmenge ΔQ in der Zeichnung aus Aufgabe 3.5 abgelesen werden kann, und kennzeichnen Sie sodann ΔQ in der Zeichnung.

Aufgabe IV

BE

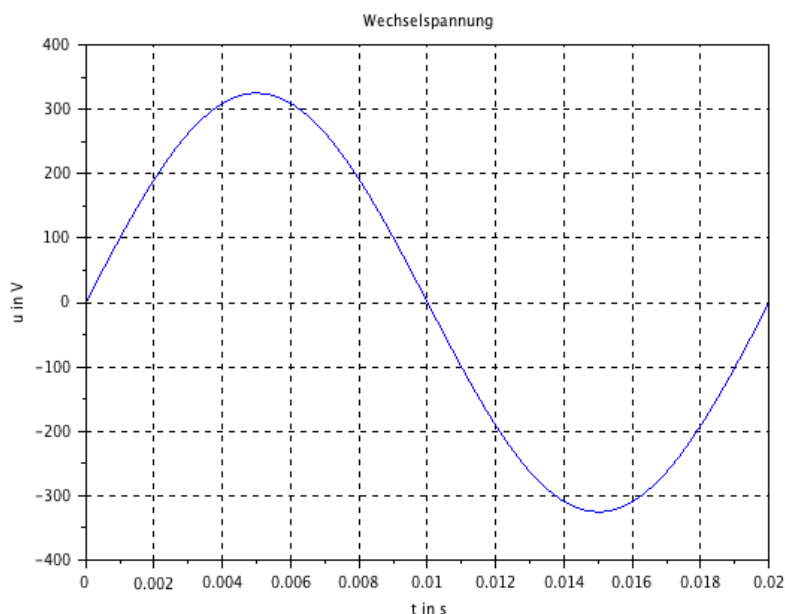
- 4.1 Die allgemeine Sinusfunktion g ist gegeben durch ihren Term $g(x)$ mit

$$g(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a \neq 0, b \neq 0$; $x \in \mathbb{R}$.

Beschreiben Sie, welche Auswirkung jeweils die Veränderung der Werte der Parameter a, b, c, d auf den Graphen der Funktion g hat.

- 4.2.0 Die nachfolgende Abbildung stellt den Verlauf einer sinusförmigen Wechselspannung für eine Periodendauer dar.



Einheiten sollen während der folgenden Rechnungen nicht mitgeführt werden. Runden Sie die Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

- 4.2.1 Der Verlauf der Wechselspannung wird durch die Funktion $u: t \mapsto u(t)$ mit $u(t) = 325 \text{ V} \cdot \sin(\omega t)$ und $t > 0$ beschrieben. Die Kurve im obigen Diagramm ist damit ein Ausschnitt des Graphen G_u der Funktion u für eine Periodendauer T . Es gilt weiterhin:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f; \quad f = \frac{1}{T}; \quad [f] = \frac{1}{\text{s}}.$$

Ermitteln Sie mithilfe des Diagramms den Wert der Kreisfrequenz ω und geben Sie die Wertemenge W_u der Funktion u an.

[Teilergebnis: $\omega = 100\pi$]

(Fortsetzung auf nächster Seite)

Aufgabe IV (Fortsetzung)**BE**

4.2.2 Berechnen Sie den Momentanwert der Spannung zum Zeitpunkt $t_1 = 0,017\text{s}$.

2

4.2.3 Ermitteln Sie alle Zeitpunkte t_k für $t > 0$, bei denen die Spannung den Wert 325V besitzt.

4

4.2.4 Geben Sie den Wert des Integrals $\int_0^T u(t)dt$ ohne weitere Rechnung an und begründen Sie Ihre Angabe.

3

4.3.0 Die gegebene Wechselspannung wird nun durch eine Einpulsleichrichterschaltung gleichgerichtet. Das heißt, für alle Zeitpunkte, zu denen die Spannung u negative Werte besitzt, wird die Spannung aufgrund der Gleichrichtung idealisiert exakt auf den Wert 0 gesetzt.

4.3.1 Skizzieren Sie den Verlauf der gleichgerichteten Spannung für drei Periodenlängen.

3

4.3.2 Sei nun $v: t \mapsto v(t)$ mit $t > 0$ diejenige Funktion, welche die gleichgerichtete Spannung beschreibt. Der sogenannte Gleichwert G der Spannung u wird wie folgt definiert:

5

$$G = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt.$$

Berechnen Sie den Gleichwert G .

Aufgabe V

BE

- 5.0 Das abgebildete Gebäude zeigt die „gläserne“ Zentralbibliothek in Ulm. Die Dachform ist eine gerade, vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Zur Vereinfachung werden die Maße des Gebäudes mit der Genauigkeit von einem Meter angegeben. Die Breite des Daches beträgt somit 28 Meter und die Höhe der Dachspitze über dem Erdboden 35 Meter. Die Grundfläche des pyramidenförmigen Daches legt die x_1 - x_2 -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems fest, die x_3 -Achse ist senkrecht zur x_1 - x_2 -Ebene nach oben orientiert. Folgende Punkte sind bekannt:

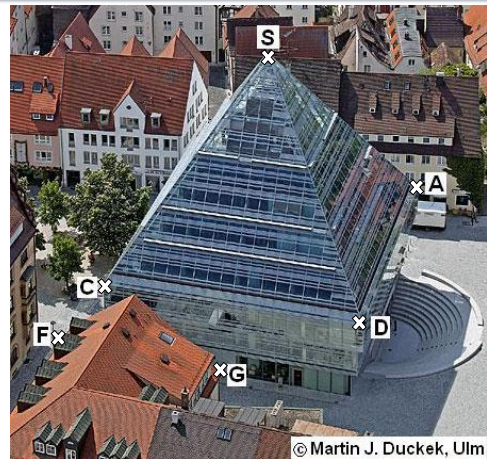


Abbildung I

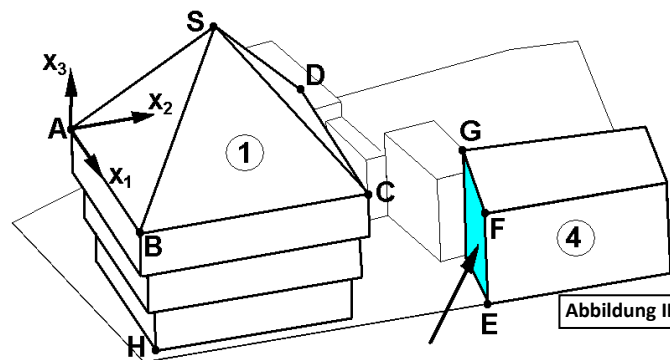


Abbildung II

$A(0|0|0)$, $B(28|0|0)$
 $C(28|28|0)$, $D(0|28|0)$,
 $E(28|42|-17)$, $F(28|42|-5)$, $G(12|43,35|-5)$ und $H(26|2|-17)$

Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Berechnung wird verzichtet.

- 5.1 Zeigen Sie, dass die Spitze S der Dachfläche die Koordinaten $S(14|14|18)$ hat. 2
- 5.2 Die Pyramidenseitenfläche CDS legt die Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Koordinatenform. 4
 [mögliches Teilergebnis: $E: 9x_2 + 7x_3 - 252 = 0$]
- 5.3 Bestimmen Sie das Maß des Winkels, den die vier Seitenflächen der Pyramide jeweils mit der Grundfläche des Daches bilden. 3
- 5.4 Um ein Angebot für die Fensterreinigung des Daches einzuholen, benötigt man den Flächeninhalt der gesamten Glasaußenfläche des Daches. Berechnen Sie hierzu die Maßzahl des Flächeninhaltes der vier (kongruenten) Seitenflächen. 3
- 5.5 Berechnen Sie die Maßzahl des Raumvolumens des Daches. 3

Aufgabe V (Fortsetzung)**BE**

- 5.6** Gegeben sei die Ebene W mit der Gleichung $W: -1,35x_1 - 16x_2 + 709,8 = 0$.
Zeigen Sie, dass die drei Punkte E, F und G in dieser Ebene liegen.

2

- 5.7** Nebenstehende Abbildung III zeigt einen Ausschnitt aus dem Stadtplan von Ulm. Bei schönem Wetter fällt Sonnenlicht (geradlinige und parallele Strahlen) auf die Pyramide.
Zu einem bestimmten festen Zeitpunkt lautet der „Richtungsvektor“ der Sonnenstrahlen:

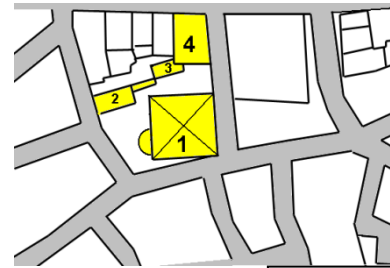


Abbildung III

4

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 14 \\ -17,5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, ob die Spitze S der Zentralbibliothek (Gebäude 1) auf der, der Zentralbibliothek zugewandten Gebäudefläche des Gebäudes 4 (siehe Abbildung II, mit Pfeil gekennzeichnet) einen Schatten wirft.

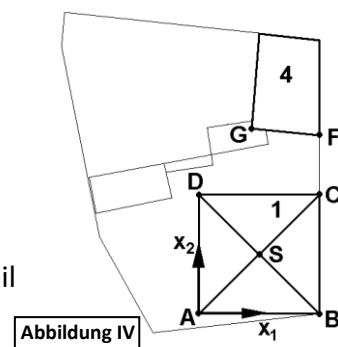


Abbildung IV

- 5.8** Bestimmen Sie den spitzen Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen zum betrachteten Zeitpunkt gegenüber der Horizontalebene (Erdboden) verlaufen.
- 5.9** Im Laufe der Zeit wird der Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf dem Erdboden auftreffen, „steiler“. Zu einem Zeitpunkt beträgt dieser 55° gegenüber der Horizontalebene. Begründen Sie ohne Rechnung, dass bei diesem Winkel der Schatten der Spitze S nicht mehr außerhalb des Gebäudes 1 auf dem Erdboden ersichtlich sein kann.

3

1