ABITURPRÜFUNG 2019 ZUM ERWERB DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE AN FACHOBERSCHULEN UND BERUFSOBERSCHULEN

MATHEMATIK

(Haupttermin)

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Dienstag, 28. Mai 2019, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;
die Auswahl trifft die Schule.

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5}{x^2 + 1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen. (2 BE)

1.2 Geben Sie Art und Gleichung der Asymptote von G_f an und bestimmen Sie die Koordinaten möglicher gemeinsamer Punkte des Graphen G_f mit seiner Asymptote. (4 BE)

1.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f. (7 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$]

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptote im Bereich $-4 \leq x \leq 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (5 BE)

1.5 Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto 0{,}5x - 1{,}5 \cdot \ln(x^2 + 1)$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. (2 BE)

1.6 Der Graph der Funktion f, seine Asymptote und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung der Teilaufgabe 1.4 und berechnen Sie die exakte Maßzahl seines Flächeninhalts. (4 BE)

1.7 Es gilt $\int_{-3}^{3} \left(0{,}5 - f(x)\right) dx = 0$ (Nachweis nicht nötig!). Deuten Sie dieses Ergebnis geometrisch. (2 BE)

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion h mit $h(x) = \ln(-x^2 + 2x)$ und der maximalen Definitionsmenge $D_h = \left]0; 2\right[$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.

2.1 Bestimmen Sie die Nullstelle von h. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h an den Rändern der Definitionsmenge. (5 BE)

2.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle und bestimmen Sie die Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_h. (5 BE)

Fortsetzung nächste Seite

3.0 Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Gesamtlänge aller Autobahnen in der Bundesrepublik Deutschland ab dem Jahresende 1950 bis 1990 an (Quelle: Statistisches Bundesamt):

Jahr	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
Länge	2128	2187	2551	3204	4110	5742	7292	8198	8822

Ausgehend von den Tabellenwerten kann die Gesamtlänge aller Autobahnen ab 1950 modelliert werden durch die reelle Funktion L mit der Gleichung

$L(t)=\frac{7500\cdot a}{a+e^{-k\cdot t}}+2000$, wobei $t\geq 0$. Dabei gibt t die Zeit in Jahren ab dem Jahresende 1950 und L(t) die Länge des Autobahnnetzes in Kilometern an.

Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

3.1 Bestimmen Sie mithilfe der Werte aus den Jahren 1950 und 1990 die Werte der Parameter a und k. (4 BE)

[Ergebnisse: $a\approx 0{,}017; k\approx 0{,}16$]

3.2 Das Modell wird als aussagekräftig und realitätsnah eingestuft, wenn die berechneten Werte von den tatsächlichen um weniger als 5 % abweichen. Zur Überprüfung werden in der folgenden Tabelle die beiden Hilfsfunktionen U und O mit $U(t)=0{,}95\cdot L(t)$ bzw. $O(t)=1{,}05\cdot L(t)$ herangezogen.

Jahr	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
U(t)	2019	2160							
Länge	2128	2187	2551	3204	4110	5742	7292	8198	8822
O(t)			2712						

Übertragen Sie die Tabelle auf Ihr Bearbeitungsblatt und berechnen Sie die fehlenden Werte. Beurteilen Sie, ob das Modell somit die genannten Kriterien erfüllt. (4 BE)

3.3 Bestimmen Sie das Jahr, in dem nach diesem Modell die Gesamtlänge von 7500 km überschritten wurde. (3 BE)

3.4 Berechnen Sie die Wendestelle t_W der Funktion L und geben Sie das zugehörige Jahr an. Verwenden Sie hierzu ohne Nachweis $\ddot{L}(t)=\frac{-0{,}3264e^{-0{,}16t}(0{,}017-e^{-0{,}16t})}{(0{,}017+e^{-0{,}16\cdot t})^3}$.

Berechnen Sie außerdem $\dot{L}(t_W)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang. (6 BE)

3.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion L für $0\leq t\leq 40$ in ein geeignetes Koordinatensystem. (3 BE)

3.6 Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} L(t)$ und interpretieren Sie diesen im Sachzusammenhang. Tatsächlich ist die Gesamtlänge aller Autobahnen nach 1990 stärker angewachsen, als nach dem Modell zu erwarten gewesen wäre. Nennen Sie einen möglichen Grund hierfür. (4 BE)

1.0 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \frac{x^3+3x^2+3x}{x^2+2x}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie D_h, prüfen Sie h auf Nullstellen und folgern Sie daraus die Art der Definitionslücken. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung an die Definitionslücken. (7 BE)

1.2.0 Die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2+3x+3}{x+2}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ist die stetige Fortsetzung der Funktion h (Nachweis nicht erforderlich). Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.2.1 Zeigen Sie, dass sich die Gleichung der Funktion f auch in der Form $f(x) = x+1+\frac{1}{x+2}$ darstellen lässt und geben Sie jeweils die Gleichung und die Art aller Asymptoten von G_f an. (4 BE)

1.2.2 Untersuchen Sie, ob sich der Graph G_f für $x \to \infty$ von oben oder von unten der schiefen Asymptote annähert. (3 BE)

1.2.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f. (8 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$]

1.2.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten für $-4 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (5 BE)

1.2.5 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^4 (f(x)-(x+1))\,dx$ auf zwei Nachkommastellen gerundet und schraffieren Sie die zugehörige Fläche im Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.2.4.

(5 BE)

Fortsetzung nächste Seite

2.0 Das Haber-Bosch-Verfahren dient zur Herstellung von Ammoniak, der wesentlicher Ausgangsstoff zur Düngemittelproduktion ist und deshalb eine außerordentliche Bedeutung für die Nahrungsversorgung der Weltbevölkerung besitzt. Die Ammoniakausbeute beim Haber-Bosch-Verfahren ist temperatur- und druckabhängig. Bei einem Druck von 300 bar und einem Temperaturbereich von $200°C \leq T \leq 700°C$ besteht eine funktionale Abhängigkeit zwischen der Ammoniakausbeute A in Prozent und der Temperatur T in °C. Die Funktion A mit der Gleichung $A(T) = \frac{7200}{72 + e^{0,0106T}}$ und der Definitionsmenge $D_A = [200; 700]$ beschreibt näherungsweise diesen Zusammenhang.

Auf die Temperatureinheit °C und das Prozentzeichen % kann bei den Rechnungen verzichtet werden. Die Temperaturangaben sind auf ganze Zahlen zu runden.

2.1 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion A. (4 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $A'(T) = \frac{-76,32e^{0,0106T}}{\left(72 + e^{0,0106T}\right)^2}$]

2.2 Die folgende Berechnung der zweiten Ableitung enthält **einen** Fehler. Benennen Sie den Fehler in Worten und geben Sie den Term der zweiten Ableitung richtig an. (3 BE)

$$A''(T) = \frac{-76,32e^{0,0106T} \cdot 0,0106 \cdot (72 + e^{0,0106T})^2 - (-76,32e^{0,0106T}) \cdot 2 \cdot (72 + e^{0,0106T}) \cdot e^{0,0106T} \cdot 0,0106}{(72 + e^{0,0106T})^2}$$

$$A''(T) = \frac{-76,32e^{0,0106T} \cdot 0,0106 \cdot (72 + e^{0,0106T}) - (-76,32e^{0,0106T}) \cdot 2 \cdot e^{0,0106T} \cdot 0,0106}{72 + e^{0,0106T}}$$

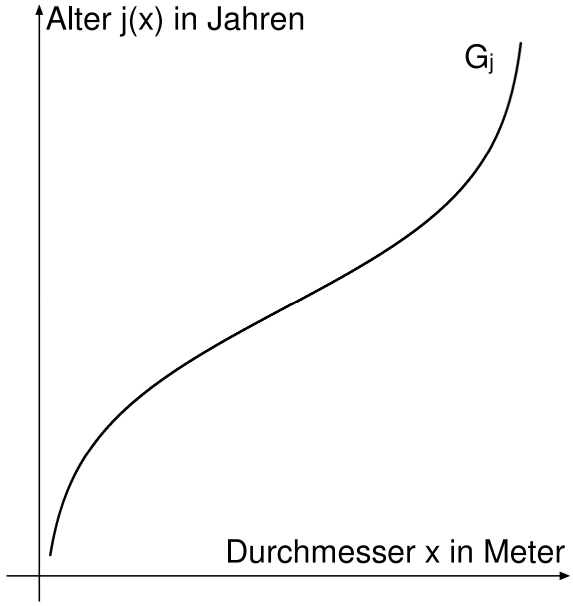
$$A''(T) = \frac{-76,32e^{0,0106T} \cdot 0,0106 \cdot \left((72 + e^{0,0106T}) - 2 \cdot e^{0,0106T}\right)}{72 + e^{0,0106T}}$$

$$A''(T) = \frac{-76,32e^{0,0106T} \cdot 0,0106 \cdot \left(72 - e^{0,0106T}\right)}{72 + e^{0,0106T}}$$

2.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion A für den angegebenen Temperaturbereich in ein geeignetes Koordinatensystem (Maßstab: 1 cm $\hat{=}$ 50°C auf der Abszisse, 1 cm $\hat{=}$ 10% auf der Ordinate).
Lesen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion A näherungsweise aus der Zeichnung ab und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang. (6 BE)

Fortsetzung nächste Seite

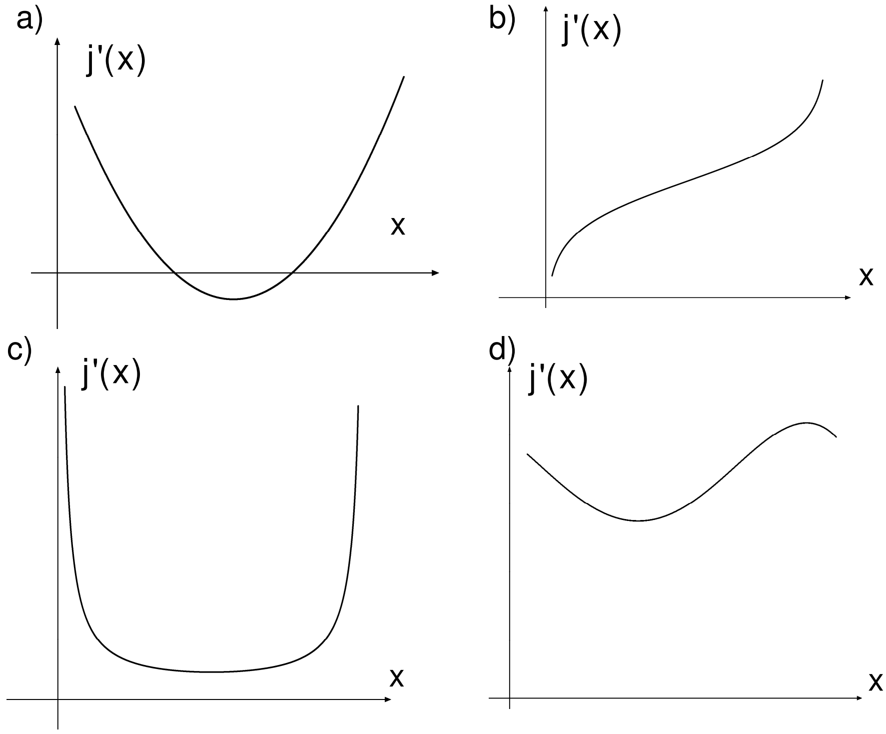
3.0 Zwischen dem Alter einer Eiche in Jahren und ihrem Stammdurchmesser x in Metern besteht ein funktionaler Zusammenhang j, der modellhaft durch die Gleichung $j(x) = 80\ln\left(\frac{60x}{3-x}\right)$ beschrieben ist.
Der Schnitt durch den Stamm der Eiche wird dabei näherungsweise als Kreis angenommen. Der Durchmesser wird in einer Höhe von 1,30 m über dem Boden gemessen. Nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion j mit der Definitionsmenge $D_j = [0{,}067; 2{,}95]$.
Der Graph G_j der Funktion j besitzt einen Wendepunkt. Die Altersangaben sind auf ganze Jahre zu runden. Auf die Mitführung von Einheiten kann verzichtet werden.



3.1 Bestimmen Sie das Alter einer Eiche, wenn in einer Höhe von 1,30 m der Umfang des Stammes 600 cm beträgt. (3 BE)

3.2 Ermitteln Sie die Wertemenge der Funktion j - auch unter Verwendung des Graphen von 3.0 - und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. (4 BE)

3.3 Eine der folgenden vier Abbildungen zeigt den Graphen der ersten Ableitungsfunktion j'. Geben Sie den Buchstaben des richtigen Graphen an und stützen Sie Ihre Wahl durch ein bekräftigendes Argument. Begründen Sie für jeden anderen Graphen mit einem stichhaltigen Argument, warum dieser nicht in Frage kommt. (4 BE)



3.4 Gegeben ist die Gleichung der zweiten Ableitung $j''(x) = \frac{-240(3-2x)}{(3x-x^2)^2}$ der Funktion j (Nachweis nicht erforderlich!). Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W von G_j und erläutern Sie die Bedeutung im Sachzusammenhang. (4 BE)

1.0 Im IR^3 sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $a \in IR$ gegeben.

1.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von a die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}_a$ eine Basis des IR^3 bilden. (4 BE)

1.2 Für diese Teilaufgabe gilt a = 5. Stellen Sie den Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}_5$ dar. (3 BE)

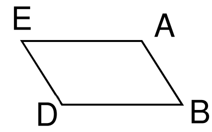
1.3 Der Punkt P(2| 0| 0) und die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ legen die Ebene F fest. Ermitteln Sie eine Gleichung für F in Parameter- und Koordinatenform. (4 BE)
[Mögliches Teilergebnis: F: $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$]

1.4 Berechnen Sie die Schnittpunkte von F mit den Koordinatenachsen und veranschaulichen Sie die Ebene F in einem Koordinatensystem. (4 BE)

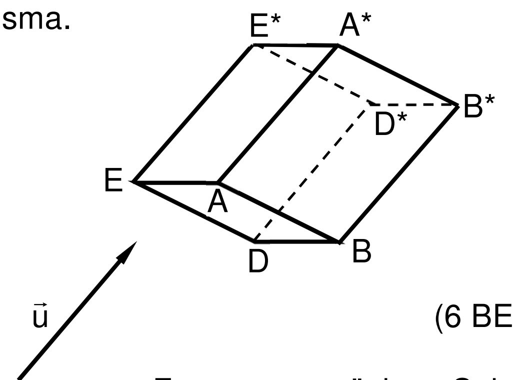
1.5 Gegeben ist die Geradenschar g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit a, $\mu \in$ IR. Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von g_a und F in Abhängigkeit von a. Bei der Bearbeitung können auch die Ergebnisse der Teilaufgabe 1.1 verwendet werden. (5 BE)

1.6.0 Gegeben sind die Punkte A(2| –3| 0), B(2| 0| –4), D(–4| –2| –4) und E(–4| –5| 0) in einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3.

1.6.1 Zeigen Sie, dass das Viereck DBAE ein Parallelogramm ist und begründen Sie, dass das Parallelogramm nicht in der Ebene F aus Teilaufgabe 1.3 liegt. (3 BE)



1.6.2 Das Viereck D*B*A*E* geht durch Parallelverschiebung um den Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ aus dem Viereck DBAE hervor. Werden die Punkte DBAE und die Punkte D*B*A*E* gemäß der Skizze verbunden, entsteht ein Prisma. Überprüfen Sie rechnerisch, ob sich die Diagonalen DA* und BE* des Prismas schneiden und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes an.



(6 BE)

Fortsetzung nächste Seite

2.0 Die Sektoren S_1, S_2 und S_3 eines Industrieunternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Für die laufende Produktionsperiode ergibt sich folgende Tabelle (alle Angaben in Mengeneinheiten ME):

	S_1	S_2	S_3	Markt	Gesamtproduktion
S_1	64	48	a	16	160
S_2	48	b	8	16	80
S_3	48	16	64	32	160

2.1 Ermitteln Sie die Werte von a und b und geben Sie deren Bedeutung im Sinne der vorliegenden Thematik an. (2 BE)

2.2 In der nächsten Produktionsperiode müssen 27 ME als Eilauftrag von Sektor S_1 an den Markt geliefert werden. Die Sektoren S_2 und S_3 liefern deswegen nichts an den Markt.
Ermitteln Sie die zu dieser Produktionsperiode gehörenden Produktionszahlen, wenn die Inputmatrix mit $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ gegeben ist. (4 BE)

2.3 Auf lange Sicht ist eine Verdreifachung der Gesamtproduktion der Sektoren S_1 und S_3 gegenüber der Situation aus 2.0 geplant. Bestimmen Sie, in welchem Intervall sich dann die möglichen Produktionszahlen von S_2 bewegen. (5 BE)

1.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A(3| 2| 4), B(3| –2| 2) und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h und geben Sie die besondere Lage der Geraden g im Koordinatensystem an. (2 BE)

1.2 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. (2 BE)

1.3 Die beiden Geraden g und h spannen die Ebene E auf. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform. (4 BE)

[Mögliches Ergebnis: $E: x_1 + x_2 - 2x_3 + 3 = 0$]

1.4 Der Punkt C(2| 1| 3) ist der Aufpunkt der Geraden g. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes A*, der sich durch Spiegelung von A an C ergibt, und begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Punkt A* in der Ebene E liegt. (3 BE)

1.5 Fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze an, in der die gegenseitige Lage der Ebene E, der Geraden g und h sowie der Punkte A, A* und C erkennbar ist. Verwenden Sie kein Koordinatensystem. (3 BE)

1.6 Gegeben ist die Ebenenschar $F_a: x_1 + a^2 x_2 - 2x_3 + a + 2 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E und F_a in Abhängigkeit von a. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

2.0 Ein landwirtschaftlicher Betrieb (L), eine Mühle (M) und eine Bäckerei (B) sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verbunden. Folgende Verflechtungstabelle stellt die Beziehungen zwischen den einzelnen Sektoren dar (alle Angaben in Mengeneinheiten ME):

	L	M	B	Markt	Gesamtproduktion
L	40	80	a	40	200
M	0	20	120	60	b
B	20	0	40	c	160

2.1 Bestimmen Sie die Werte von a, b und c und geben Sie deren Bedeutung im Sinne der vorliegenden Thematik an. (3 BE)

2.2 Beim landwirtschaftlichen Betrieb beträgt der gesamte Erlös 240.000 €. Dabei erzielt er pro ME am Markt doppelt so viel wie er von der Bäckerei bzw. der Mühle erhält. Berechnen Sie, wie hoch die Einnahmen des landwirtschaftlichen Betriebs am Markt pro ME sind. (4 BE)

2.3.0 Der landwirtschaftliche Betrieb stellt seinen Hof auf biologischen Anbau um und produziert deshalb ein Viertel ME weniger als bisher. Die Mühle produziert infolgedessen 40 ME weniger als bisher.

2.3.1 Bestimmen Sie, in welchem Intervall sich dann die möglichen Produktionszahlen der Bäckerei bewegen. (6 BE)

2.3.2 Durch die Umstellung lässt sich am Markt ein höherer Preis für die Produkte von L von nun 3000 € pro ME erzielen. Weiterhin zahlen die Abnehmer Mühle und Bäckerei jeweils die Hälfte des Marktpreises für eine ME von L. Prüfen Sie, ob die Umstellung zu einer Verringerung der Einnahmen führt (vgl. Teilaufgabe 2.2), wenn man davon ausgeht, dass die Bäckerei 60 ME insgesamt produziert. (4 BE)

2.4 Nach der erfolgreichen Umstellung auf Bio-Anbau verkauft der landwirtschaftliche Betrieb im folgenden Jahr mehr in seinem Hofladen, sodass die Marktabgabe auf 52 ME steigt. Sowohl die Mühle als auch die Bäckerei hingegen leiden an starker sich im Umland ansiedelnder Konkurrenz. Deshalb gibt die Mühle nur noch 39 ME und die Bäckerei 78 ME an den Markt ab. Bestimmen Sie die daraus resultierenden Produktionszahlen der drei Betriebe. (5 BE)