ABITURPRÜFUNG 2019 AN BERUFSOBERSCHULEN

UND FACHOBERSCHULEN

ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN

HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

Dienstag, den 28. Mai 2019, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den

Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A: Analysis
A I

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=\arccos\left(\frac{4x}{x^2+4}\right)$ und der maximalen Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

8 **1.1** Zeigen Sie, dass gilt: $D_f = \mathbb{R}$. Ermitteln Sie außerdem die Gleichung der Asymptote von G_f und die Nullstelle von f.

4 **1.2** Weisen Sie rechnerisch nach, dass für alle $x \in D_f$ gilt: $f(x)+f(-x)=\pi$. Nennen Sie die geometrische Bedeutung dieser Aussage für den Graphen von f.

8 **1.3** Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x)=\frac{4\cdot(x^2-4)}{(x^2+4)\cdot|x^2-4|}$]

5 **1.4** Begründen Sie, dass $f'(x)$ für $-2<x<2$ in der Form $\frac{-4}{x^2+4}$ dargestellt werden kann.

Untersuchen Sie außerdem durch geeignete Grenzwertberechnungen, ob es Stellen gibt, an denen der Graph von f einen Knick hat und geben Sie diese gegebenenfalls an.

4 **1.5** Zeichnen Sie den Graphen von f für $-6 \le x \le 6$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 1 cm).

5 **1.6** Der Graph von f schließt im ersten Quadranten zusammen mit den beiden Koordinatenachsen ein Flächenstück ein. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A I

BE

2.0 Gegeben ist die Funktion $g_a: x \mapsto e^{\frac{2x-a}{x+a}}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in der Definitionsmenge $D_{g_a} = \mathbb{R} \setminus \{-a\}$.

3 **2.1** Zeigen Sie, dass für jeden Wert von a die Spiegelung des Graphen von g_a an der y-Achse den Graphen von g_{-a} ergibt.

4 **2.2** Untersuchen und entscheiden Sie, ob und gegebenenfalls an welchen Stellen der Graph von g_a Extrempunkte besitzt.

[Mögliches Teilergebnis: $g_a'(x) = \frac{3a}{(x+a)^2} \cdot e^{\frac{2x-a}{x+a}}$]

2.3.0 Die Funktion g_a besitzt die Umkehrfunktion g_a^{-1} (Nachweis nicht erforderlich).

5 **2.3.1** Ermitteln Sie ohne Verwendung der Ableitung von g_a^{-1} eine Gleichung der Tangente an den Graphen von g_a^{-1} in seinem Schnittpunkt mit der x-Achse.

6 **2.3.2** Bestimmen Sie einen möglichen Term $g_a^{-1}(x)$ sowie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von g_a.

8 **3** Bestimmen Sie für die Differenzialgleichung $y' - 2 \cdot y = x \cdot e^x$ mit $x \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung mit der Methode der Variation der Konstanten.

60

Aufgabengruppe A: Analysis
A II

BE		
	1.0	Gegeben ist die Funktion $f_a: x \mapsto 1 - \frac{2 \cdot e^x}{e^x + a}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subseteq \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_{f_a} bezeichnet
5	**1.1**	Ermitteln Sie jeweils in Abhängigkeit von a die maximale Definitionsmenge D_{f_a} und die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f_a mit der y-Achse, sofern vorhanden.
		Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $a < 0$.
5	**1.2**	Stellen Sie $f_a(x)$ durch einen einzigen Bruchterm dar und zeigen Sie, dass der Graph von f_a punktsymmetrisch zum Punkt $P_a(\ln(-a) \mid 0)$ ist.
3	**1.3**	Ermitteln Sie die Gleichungen der waagrechten Asymptoten des Graphen von f_a.
4	**1.4**	Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a. [Mögliches Teilergebnis: $f_a'(x) = \frac{-2a \cdot e^x}{(e^x + a)^2}$]
		Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $a = -1$.
4	**1.5**	Zeichnen Sie den Graphen von f_{-1} für $-3 \leq x \leq 3$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 1 cm). Planen Sie in y-Richtung etwa $-4 \leq y \leq 4$ ein.
	1.6.0	Die Funktion f_{-1} ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich).
4	**1.6.1**	Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Umkehrfunktion von f_{-1}. Geben Sie auch die Definitionsmenge der Umkehrfunktion von f_{-1} an.
3	**1.6.2**	Der Punkt $Q(2 \mid ?)$ liegt auf dem Graphen der Umkehrfunktion von f_{-1}. Berechnen Sie die Steigung der Tangente im Punkt Q an den Graphen der Umkehrfunktion von f_{-1}.

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

BE		
7	**1.7**	Der Graph von f_{-1} schließt mit der x-Achse und den senkrechten Geraden bei $x=\ln(2)$ und $x=\ln(15)$ eine endliche Fläche ein. Rotiert diese Fläche um die x-Achse, so entsteht ein rotationssymmetrischer Körper. Zeigen Sie zunächst, dass gilt: $(1-\frac{2e^x}{e^x-1})^2=1+\frac{4e^x}{(e^x-1)^2}$. Berechnen Sie anschließend die Maßzahl des Volumens des rotationssymmetrischen Körpers.
	2.0	Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ in der Definitionsmenge $D_h=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
3	**2.1**	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x\to+\infty$ und für $x\to 0^+$.
5	**2.2**	Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von h. [Mögliches Teilergebnis: $h'(x)=\frac{2}{x^2+1}$]
	2.3.0	Gegeben ist die Funktion $H: x \mapsto \int_1^x h(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_H=\mathbb{R}^+$.
4	**2.3.1**	Ermitteln Sie ohne Verwendung der integralfreien Darstellung von $H(x)$ die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunkts des Graphen von H.
5	**2.3.2**	Bestimmen Sie für die Funktion H eine integralfreie Darstellung.
8	**3**	Bestimmen Sie mit der Methode der Variation der Konstanten die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $x\cdot y'+y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ für $x>0$. [Mögliches Teilergebnis: $y_h=\frac{D}{x}$]
60		

Aufgabengruppe B: Stochastik
B I

BE		
	1.0	Ein Getränkehersteller füllt Mixgetränke in Mehrwegflaschen ab. Bei der luftdichten Verschließung der Flaschen treten Schwierigkeiten auf. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % ist eine Flasche nicht korrekt verschlossen. Die Flaschen werden in Packungen zu je 200 Stück ausgeliefert.
3	**1.1**	Eine der Packungen wird zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: A: „Die Packung enthält genau 19 nicht korrekt verschlossene Flaschen.“ B: „Die Packung enthält mehr als 187 korrekt verschlossene Flaschen.“
6	**1.2**	Das Unternehmen setzt zur Endkontrolle einen Prüfautomaten ein. Dieser sondert eine korrekt verschlossene Flasche mit der Wahrscheinlichkeit von 4 % irrtümlich aus. Insgesamt werden 12 % aller Flaschen ausgesondert. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Prüfautomat eine nicht korrekt verschlossene Flasche aussondert.
6	**1.3**	Nach Wartungsarbeiten am Abfüllautomaten und am Prüfautomaten verringert sich der Anteil der nicht korrekt verschlossenen Flaschen im Handel auf 1,6 %. Die neue Verpackungsgröße je Palette beträgt nun 600 Stück. Eine der Paletten wird zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse unter Verwendung der Normalverteilung als Näherung: C: „Die Palette enthält genau 13 nicht korrekt verschlossene Flaschen.“ D: „Die Palette enthält mehr als 13 nicht korrekt verschlossene Flaschen.“
3	**1.4**	Die Werbung verspricht, dass die neueste Generation von Abfüll- und Prüfautomaten noch zuverlässiger arbeitet. Aus den Produktinformationen ist Folgendes zu entnehmen: „Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Verpackungseinheit von 20 Flaschen nur korrekt verschlossene Flaschen enthält, liegt bei mindestens 90 %.“ Bestimmen Sie den Prozentsatz p der nicht korrekt verschlossenen Flaschen, die nach der Endkontrolle an dem Prüfautomaten der neuesten Generation laut Werbung (im ungünstigsten Fall) in den Handel gelangen.
7	**2**	Der Hersteller eines neuentwickelten Abfüllautomaten versichert, dass die Fehlerquote beim Verschließen der Flaschen höchstens bei 0,5 % liegt. Ein leitender Mitarbeiter des Getränkeherstellers misstraut dieser Behauptung und möchte sie mit einem Signifikanztest anhand von 600 Flaschen überprüfen. Legen Sie für einen Signifikanztest mit einem Signifikanzniveau von 3 % die Testgröße fest, geben Sie die Nullhypothese an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. Verwenden Sie dabei die Normalverteilung als Näherung.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
8	**3**	Für eine Feier des Getränkeherstellers stehen 300 Sitzplätze zur Verfügung. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein angemeldeter Gast nicht erscheint, beträgt erfahrungsgemäß 20 %. Berechnen Sie mithilfe der Normalverteilung als Näherung die Anzahl der Einladungen, die die Firmenleitung höchstens verschicken darf, wenn das Risiko, dass die 300 Sitzplätze nicht ausreichen, höchstens 2,5 % betragen soll.
	4.0	Für die Betriebsfeier werden 30 Geschäftspartner eines Zulieferbetriebes aus dem Ausland eingeladen, die gemeinsam anreisen.
4	**4.1**	Bei 2 Personen der Gruppe ist der Pass bereits abgelaufen. Bei der Einreise nach Deutschland wird bei der Passkontrolle eine Stichprobe vorgenommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 kontrollierten Personen höchstens einer der beiden abgelaufenen Pässe entdeckt wird.
3	**4.2**	Die 30 Geschäftspartner werden in einem Hotel mit 35 Einzelzimmern untergebracht. 10 der Zimmer befinden sich im 1. Stock und 25 Zimmer im zweiten Stock. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Zimmerbelegungen, wenn im ersten Stock 10 und im zweiten Stock die verbleibenden 20 Geschäftspartner untergebracht werden und die Reihenfolge der Zimmerbelegungen berücksichtigt wird.
40		

Aufgabengruppe B: Stochastik
B II

BE

Schafkopf ist eines der beliebtesten Kartenspiele Bayerns und angrenzender Regionen. Das sogenannte „Bayerische Kartenblatt“, mit dem in Bayern Schafkopf gespielt wird, besteht aus 32 Karten, von denen jeweils 4 vom gleichen „Typ“ sind. Die vorkommenden „Typen“ sind 7, 8, 9, 10, Unter (Untergebener), Ober (Offizier), König und As. Beim Spiel werden alle 32 Karten zufällig und verdeckt so an vier Spieler verteilt, dass jeder Spieler gleich viele Karten erhält.

3 **1.1** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler nur Karten erhält, die vom Typ 7, 8, 9 oder 10 sind.

4 **1.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: „Der Spieler erhält *mindestens drei Ober*.“.

[Mögliches Ergebnis: $P(E) \approx 3{,}93\,\%$]

4 **1.3** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler

a) bei 10 Spielen genau zweimal *mindestens drei Ober* ausgeteilt bekommt.

b) bei 20 Spielen genau zweimal nacheinander *mindestens drei Ober* erhält.

4 **1.4** Berechnen Sie, wie oft man mindestens spielen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % wenigstens einmal *mindestens drei Ober* ausgeteilt zu bekommen.

8 **1.5** Ermitteln Sie mithilfe der Normalverteilung als Näherung die Anzahl der Spiele, die ein Spieler mindestens absolvieren muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als fünfmal *mindestens drei Ober* zu bekommen.

7 **2** Es gibt zwei Varianten des Schafkopf, den „Langen“ (hier erhält jeder Spieler 8 Karten) und den „Kurzen“ (hier erhält jeder Spieler nur 6 Karten). Auf einer speziellen Internetplattform, die die Möglichkeit bietet, mit anderen Teilnehmern online Schafkopf zu spielen, können registrierte Mitglieder beide Varianten des Spiels spielen, aber auch anderen Mitgliedern bei deren Spielen einfach nur zuschauen. Verwenden Sie im Folgenden die Bezeichnungen K: „Ein zufällig ausgewähltes Mitglied spielt den Kurzen.“ und L: „Ein zufällig ausgewähltes Mitglied spielt den Langen.“.

Es ist bekannt, dass 20 % der Mitglieder ausschließlich den „Kurzen“ und 25 % beide Varianten spielen. Von den Mitgliedern, die keinen „Langen“ spielen, spielen 80 % den „Kurzen“. Eines der Mitglieder wird zufällig ausgewählt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das ausgewählte Mitglied nur zuschaut, und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mitglied, das keinen „Kurzen“ spielt, einen „Langen“ spielt. Weisen Sie außerdem nach, dass die Ereignisse K und L stochastisch abhängig sind.

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung B II

BE		
	3.0	Auf der in Aufgabe 2 beschriebenen Internetplattform gibt es ein Mitglied mit dem Spielernamen „NurLang“, das innerhalb eines Monats 1000 Spiele spielt.
3	**3.1**	Berechnen Sie unter Verwendung der Normalverteilung als Näherung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „NurLang“ genau 39-mal *mindestens drei Ober* erhält (siehe Teilaufgabe 1.2).
7	**3.2**	Immer wieder wird im Forum der Internetplattform die Vermutung aufgeworfen, der Mischalgorithmus wäre manipuliert. Dabei wäre es von Vorteil für den Betreiber, wenn öfter als zu erwarten *mindestens drei Ober* bei einem Spieler erscheinen. „NurLang“ möchte dies anhand 1000 weiterer Spiele überprüfen. Er ist geneigt den Skeptikern zu glauben, wenn die Anzahl der Spiele, in denen er *mindestens drei Ober* hat, den Erwartungswert um mehr als 10 % übertrifft. Formulieren Sie eine geeignete Testgröße, die Nullhypothese und die Gegenhypothese des Tests und geben Sie den Annahmebereich an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „NurLang“ aufgrund der 1000 beobachteten Spiele den Skeptikern irrtümlicherweise zustimmt.
40		