Fachabiturprüfung 2019

zum Erwerb der Fachhochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 28. Mai 2019, 09:00 Uhr – 10:00 Uhr

Mathematik

Ausbildungsrichtung Technik

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

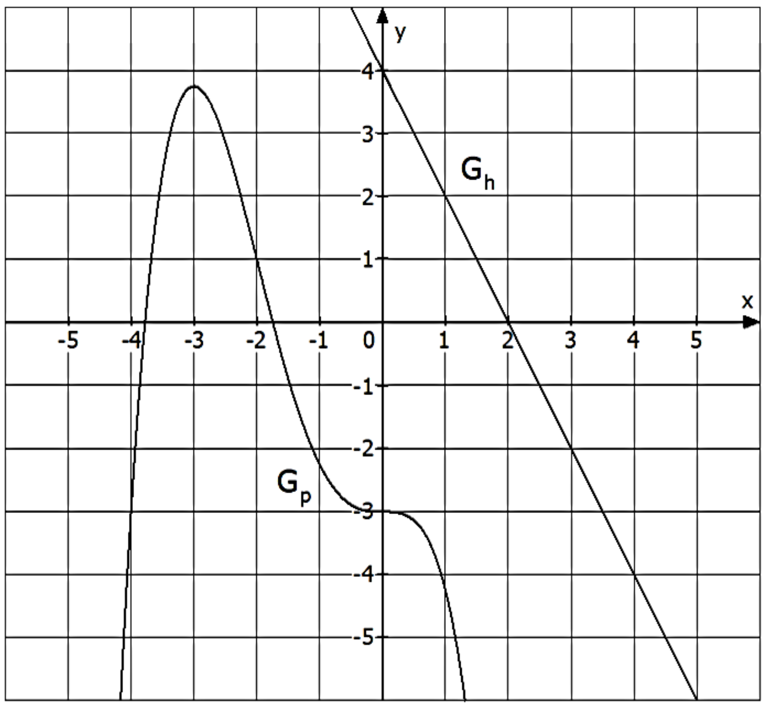
BE

5 **1** Die Funktion $f_a^{\prime}: x \mapsto (x-a)^2 \cdot (x+3)$ mit der Definitionsmenge $D_{f_a^{\prime}} = \mathbb{R}$ ist die erste Ableitungsfunktion der Funktion f_a mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie sämtliche Werte für a, sodass der Graph der zugehörigen Funktion f_a mehr als einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt.
Begründen Sie, von welcher Art diese Punkte dann jeweils sind.

2.0 Die ganzrationale Funktion 4. Grades p und die lineare Funktion h sind auf $D_p = D_h = \mathbb{R}$ definiert.
In der nachfolgenden Abbildung sind Ausschnitte der Graphen von p und h dargestellt.

Hinweis: Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.



1 **2.1** Geben Sie $p(h(3))$ an.

2 **2.2** Begründen Sie ohne Rechnung, wie viele reelle Lösungen die Gleichung $h(p(x)) = 0$ besitzt.

2 **3** Ein Becher, der zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ mit 60 °C heißer Trinkschokolade gefüllt ist, steht in einem Raum, in dem eine konstante Umgebungstemperatur von 20 °C herrscht. Alle 27 Minuten halbiert sich die Temperaturdifferenz zwischen der Trinkschokolade und der Umgebungstemperatur. Die Funktion T beschreibt die Temperatur der Trinkschokolade in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten.
Geben Sie für die Funktion T einen möglichen Funktionsterm $T(t)$ an. Auf das Mitführen der Einheiten kann verzichtet werden.

Fortsetzung siehe nächste Seite

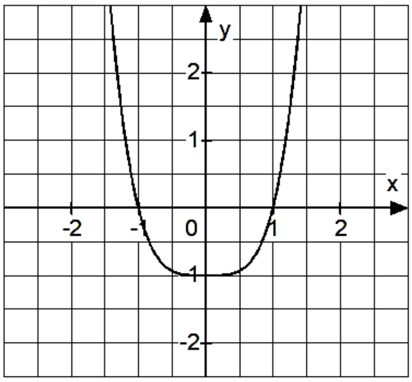
BE

3 **4.1** Nennen Sie jeweils eine mögliche Bedeutung der folgenden Aussagen für den Verlauf des Graphen einer beliebigen ganzrationalen Funktion $k: x \mapsto k(x)$ mit $D_k = \mathbb{R}$.

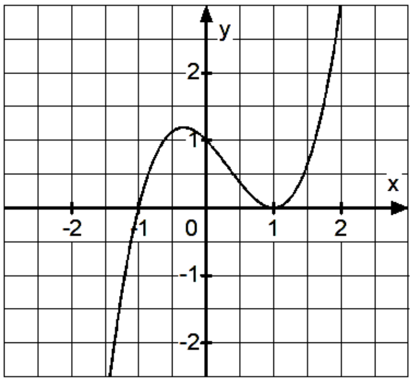
(a) $k'(-1) < 0$ (b) $k''(-1) > 0$ (c) $\int_{-1}^{1} k(x)\,dx < 0$

3 **4.2** Die nachfolgend dargestellten Schaubilder (A) bis (D) zeigen Ausschnitte der Graphen von ganzrationalen Funktionen vom Grad $n \geq 3$.

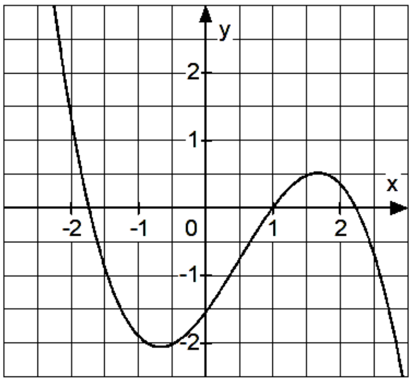
A



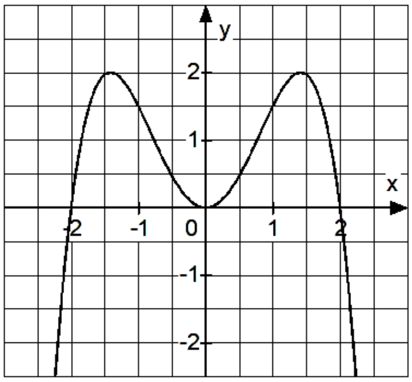
B



C



D



Geben Sie für alle Aussagen (a), (b) und (c) aus 4.1 an, welche der dargestellten Graphen (A) bis (D) die jeweilige Aussage erfüllen.

5.0 Gegeben sind folgende Funktionen mit ihrer jeweiligen Definitionsmenge:

$s: x \mapsto e^{-x^2}$ $D_s = \mathbb{R}$

$t: x \mapsto e^{2x} - e^{x}$ $D_t = \mathbb{R}$

$u: x \mapsto e^{(2x)^2}$ $D_u = \mathbb{R}$

3 **5.1** Nennen Sie diejenigen Funktionen, für welche folgende Aussage zutrifft.

„Für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ streben die Funktionswerte jeweils gegen Null.“

Begründen Sie für alle anderen Funktionen, warum diese für sie nicht zutrifft.

3 **5.2** Ermitteln Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes P der Graphen von s und u.

22

Fortsetzung siehe nächste Seite

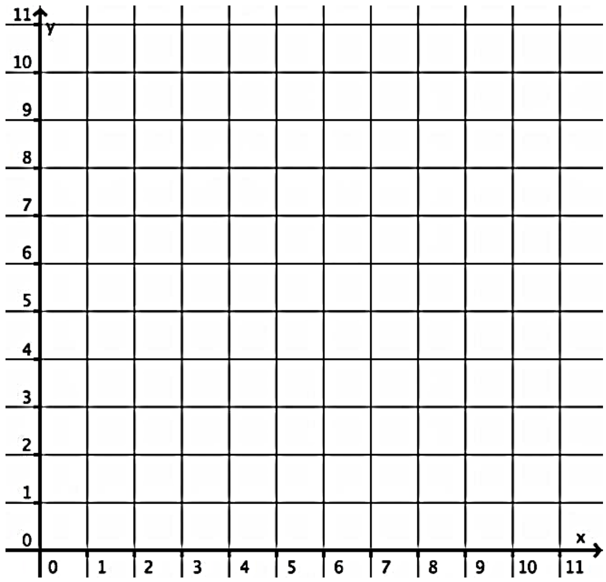
BE

3 **1** Zeichnen Sie in das rechts abgebildete Koordinatensystem des IR^2 je einen Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein, welche die drei folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) zugleich erfüllen:

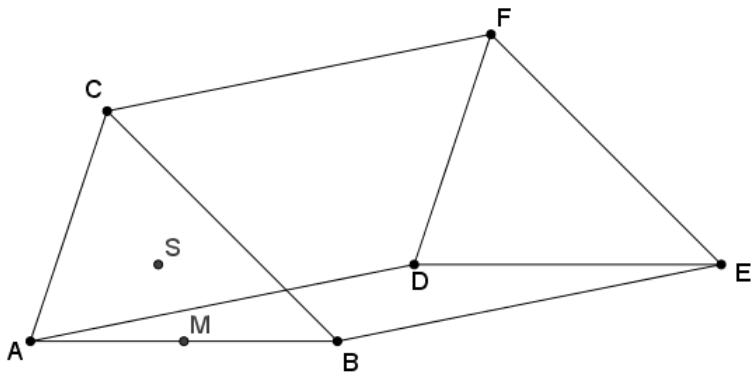
(1) $|\vec{a}| = 2 \cdot |\vec{b}|$

(2) $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

(3) $|\vec{a} \times \vec{b}| = 18$



3 **2** Das Dreieck ABC hat den Schwerpunkt S, somit gilt: $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{MC}$. M ist dabei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Das Dreieck ABC dient als Grundfläche des abgebildeten Prismas.



Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{BF}$.
Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{MS}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

3.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 sind die Punkte $A(1|3|-2)$, $B_k(k|2|-1)$ und $C_k(4|k+2|-1)$ mit $k \in IR$ gegeben.

3 **3.1** Prüfen Sie, ob es Werte für k gibt, sodass die Punkte A, B_k und C_k auf einer Geraden liegen.

3 **3.2** Bestimmen Sie für $k = 1$ eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform, in der die Punkte A, B_1 und C_1 liegen.

12

Fachabiturprüfung 2019

zum Erwerb der Fachhochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 28. Mai 2019, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

Mathematik

Ausbildungsrichtung Technik - CAS

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *lineare Algebra und analytische Geometrie* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE		
	1.0	Der Graph G_f einer auf $D_f=\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto ax^4+bx^3+c$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$ und $a\neq 0$ besitzt die beiden Wendepunkte $W_1(0\mid 1)$ und $W_2(2\mid -3)$.
3	**1.1**	Ermitteln Sie den Funktionsterm von f. $\left[\text{Teilergebnis: } a=\frac{1}{4};\ b=-1;\ c=1\right]$
3	**1.2**	Bestimmen Sie die Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_f.
3	**1.3**	Zeichnen Sie unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f im Bereich $-1{,}5\leq x\leq 4{,}25$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein. Maßstab: x-Achse: 1 LE = 2 cm; y-Achse: 1 LE = 1 cm
4	**1.4**	Gegeben ist weiterhin die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x)=2x-7$ auf $D_g=\mathbb{R}$. Der Graph G_g dieser Funktion schließt mit dem Graphen G_f ein endliches Flächenstück ein. Zeichnen Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.3 ein, kennzeichnen Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.
	2.0	Gegeben sind die reelle Funktion $h_k: x\mapsto 2x^3+4kx^2+8x$ mit $k\in\mathbb{R}$ und $D_{h_k}=\mathbb{R}$.
2	**2.1**	Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist. „Der Graph der Funktion h_k ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.“
5	**2.2**	Ermitteln Sie, für welche Werte für k die Funktion h_k genau eine Nullstelle besitzt.
4	**2.3**	Bestimmen Sie den Wert für k, für den die Funktion h_k an der Stelle $x=2$ einen relativen Tiefpunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an.
	3.0	Die Anzahl bestimmter für den Menschen schädlicher Bakterien in einem Badesee ist nach einer langen Hitzeperiode zu hoch. Zur Bekämpfung der Bakterien wird deshalb mehrmals eine Substanz in den Badesee eingeleitet, welche die Bakterien abtöten soll. Aus den bisherigen seltenen Anwendungen der Substanz in den Vorjahren konnte ermittelt werden, dass sich die Bakterienanzahl im Wasser des Sees in Abhängigkeit von der Zeit t nach der letztmaligen Einleitung in recht guter Näherung mittels der Funktionsgleichung $B(t)=3+\left(r\cdot t^2+\frac{1}{5}\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}t+s}$ mit $r,s\in\mathbb{R}$ und $t\in\mathbb{R}_0^+$ vorhersagen lässt. Dabei beschreibt $B(t)$ die Anzahl der Bakterien in Tausend pro cm^3 in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen ab der letztmaligen Einleitung der Substanz in den See zum Zeitpunkt $t_0=0$.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3 **3.1** Berechnen Sie die Werte der Parameter r und s, wenn zum Zeitpunkt der letztmaligen Einleitung der Substanz in den See 3600 Bakterien pro cm^3 Wasser und nach 2 Tagen 3000 Bakterien pro cm^3 Wasser gemessen wurden.

$$\left[\text{Ergebnis: } s = \ln(3)\,;\; r = -\frac{1}{20}\right]$$

6 **3.2** Bestimmen Sie auf Grundlage des Modells das größtmögliche Zeitintervall seit der letzten Einleitung der Substanz in den See, in dem die Bakterienanzahl rückläufig ist, und ermitteln Sie die Anzahl der Bakterien pro cm^3 Wasser im See, welche zu keinem Zeitpunkt unterschritten wird. Runden Sie die Intervallgrenzen sinnvoll.

6 **3.3** Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die Abnahmegeschwindigkeit der Bakterienanzahl betragsmäßig am größten ist, und geben Sie diese Abnahmegeschwindigkeit der Bakterienanzahl sinnvoll gerundet an.

2 **3.4** Bestimmen Sie die Anzahl der Bakterien pro cm^3 Wasser im See, die sich nach dem Modell langfristig nach der letztmaligen Einleitung der Substanz einstellt.

2 **3.5** Das folgende Schaubild zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion B. Bestimmen Sie näherungsweise mithilfe dieses Schaubildes, wie viele Bakterien pro cm^3 Wasser durchschnittlich im Zeitraum zwischen dem Zeitpunkt $t_1 = 11$ und dem Zeitpunkt $t_2 = 23$ nach der letztmaligen Einleitung der Substanz in den See täglich dazukommen.

43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $f_a: x \mapsto (x-a)\left(x^2 - \frac{1}{4}a\right)$ mit ihrer Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

7 **1.1** Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a mit deren Vielfachheiten in Abhängigkeit von a.

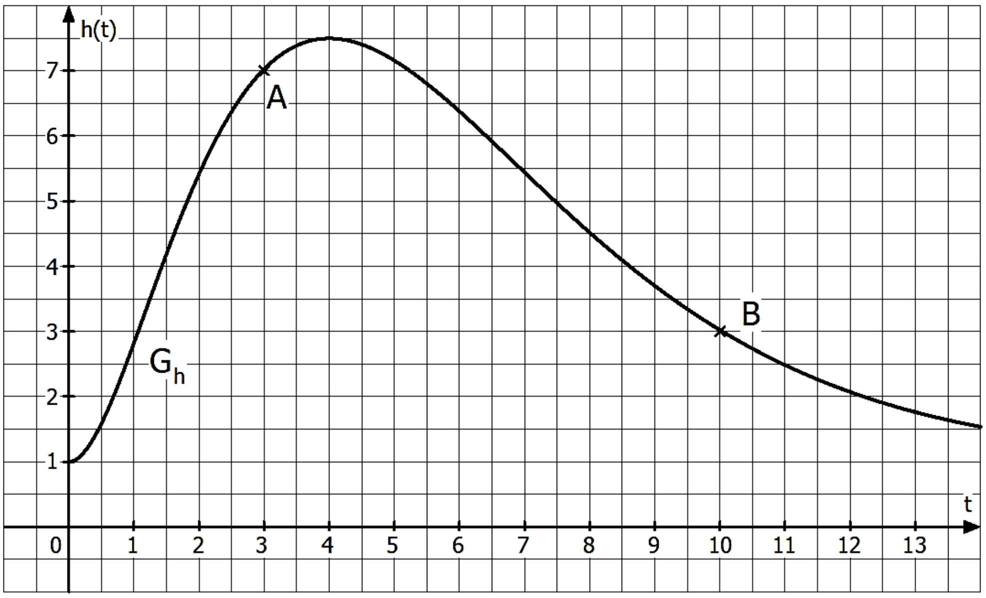
8 **1.2** Bestimmen Sie diejenigen Werte für a, für die der Graph der Funktion f_a eine Wendetangente mit der Steigung $-\frac{3}{8}$ und zusätzlich nur im II. oder III. Quadranten Punkte mit waagrechter Tangente besitzt.

1.3.0 Im Folgenden sei $a = 4$. Somit ist $f_4(x) = (x-4)\left(x^2 - 1\right)$.

3 **1.3.1** Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von f_4 im Bereich von $-2 \le x \le 5$ unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse.

4 **1.3.2** Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_{-1}^{4} f_4(x)\,dx$ und interpretieren Sie den Wert geometrisch in Bezug auf den Graphen von f_4.

2.0 Bei einem Wasserkraftwerk wird durch eine Staumauer Wasser eines Flusses in einem Stauraum aufgestaut. Der Pegelstand des vor der Staumauer im Stauraum aufgestauten Wassers wird bezüglich des Bodens des Stauraums in Metern gemessen.
Ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ stieg der Pegelstand infolge von einsetzender Schneeschmelze und Starkregen zunächst an. Daher wurde ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Pegelstand kontinuierlich in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen aufgezeichnet.



Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h der Funktion $h: t \mapsto a \cdot t^2 \cdot e^{b \cdot t} + 1$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$, $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Durch G_h wird der Pegelstand näherungsweise beschrieben.
Die Ergebnisse sind auf eine Dezimalstelle zu runden. Auf das Mitführen von Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

1 **2.1** Geben Sie die Bedeutung des Wertes $h(0)$ im vorliegenden Sachzusammenhang an.

3 **2.2** Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung aus 2.0 die Werte von a und b.

2 **2.3** Entnehmen Sie der Abbildung aus 2.0 die Zeitpunkte, zu denen der Pegelstand doppelt so hoch wie zu Beginn des Anstiegs ist.

2.4.0 Im Folgenden gilt $a = 3$ und $b = -\frac{1}{2}$.

6 **2.4.1** Ermitteln Sie ohne Verwendung der Abbildung aus 2.0 den maximalen Pegelstand während der betrachteten Hochwasserphase.

6 **2.4.2** Das Wasserkraftwerk öffnet aus Sicherheitsgründen seine Schleusen, wenn die momentane Anstiegsrate des Pegelstandes $4{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{Tag}}$ übersteigt. Zeigen Sie, dass bei dem vorliegenden Hochwasserereignis die Schleusen nicht geöffnet werden mussten.

3 **2.4.3** Bestimmen Sie rechnerisch den mittleren Pegelstand des aufgestauten Wassers bezüglich der ersten 10 Tage.

43

BE		
	1.0	Familie Brunner besitzt ein Grundstück mit einer Rasenfläche in Hanglage. Um sich aufgrund seines fortgeschrittenen Alters das Rasenmähen zu erleichtern, plant Herr Brunner den Kauf eines Rasenmähroboters. Für die Auswahl eines geeigneten Mähroboters möchte er vorab einige Kriterien überprüfen, um anhand von Datenblättern ein passendes Gerät auszuwählen. Hierfür legt Herr Brunner ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ fest, in dem sich die ebene, viereckige Rasenfläche durch die Eckpunkte $A(30\|1\|2)$, $B(0\|0\|0)$, $C(1\|-15\|5)$ und $D(31\|-14\|7)$ beschreiben lässt. Herr Brunner wählt dabei die x_3-Achse so, dass die x_3-Koordinate die Höhe eines Ortes auf der Rasenfläche gegenüber der horizontalen x_1-x_2-Ebene angibt. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf das Mitführen von Einheiten kann bei der Berechnung verzichtet werden.
5	**1.1**	Die Rasenfläche muss mit einem Begrenzungsdraht umfasst werden. Prüfen Sie, ob es sich bei der Rasenfläche um ein Rechteck handelt, und berechnen Sie die Mindestlänge des Begrenzungsdrahtes. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Meter.
6	**1.2**	Dem Datenblatt eines Mähroboters des Modells Steinbock entnimmt Herr Brunner, dass die korrekte Funktionsweise dieses Modells für Steigungen am Hang bis zu 35 % gewährleistet ist. Prüfen Sie, ob das gewünschte Modell demnach zum Mähen der beschriebenen Rasenfläche geeignet ist.
4	**1.3**	Der Mähroboter aus 1.2 schafft es, mit einer Akkuladung eine Rasenfläche mit 120 m² Flächeninhalt in zwei Stunden zu mähen. Die anschließende Ladezeit für einen Ladezyklus beträgt 1,5 Stunden. Ermitteln Sie die Zeitdauer bis die gesamte Rasenfläche gemäht ist, wenn der Mähroboter zu Beginn vollständig geladen ist, und etwaige Zeitverluste, z. B. durch das Zurückfahren des Mähroboters zur Ladestation, unberücksichtigt bleiben. Runden Sie sinnvoll.
8	**1.4**	Die Ladestation für den Mähroboter soll so auf dem Rand der Rasenfläche zwischen den Punkten A und B platziert werden, dass die Entfernung der Ladestation zur Anschlussstelle für die Stromversorgung so kurz wie möglich ist. Eine geeignete Anschlussstelle für die Stromversorgung der Ladestation befindet sich bei $S(20\|10\|1)$ außerhalb der Rasenfläche. Bestimmen Sie die Koordinaten für den optimalen Standort der Ladestation L. Runden Sie die Koordinaten auf eine Nachkommastelle. Erstellen Sie anschließend eine Skizze, aus der die relative Lage der Punkte A, B und L zueinander hervorgeht.
23		

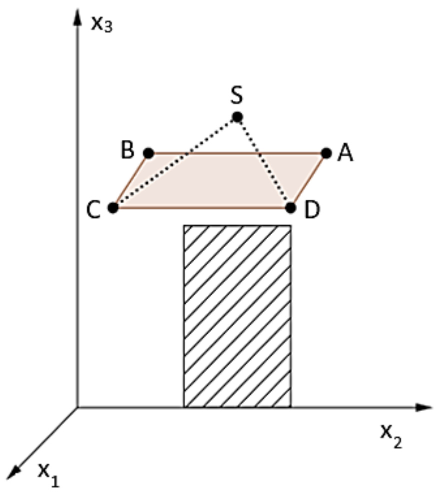
BE

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebenen E und F mit $E\colon x_1+2x_2-x_3=2$ und $F\colon 3x_1+4x_2+x_3=4$ gegeben.

4 **1.1** Der Ursprung des Koordinatensystems wird an der Ebene E gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes P.

3 **1.2** Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden s, in der sich die Ebenen E und F schneiden.

2.0 Über einer Haustüre soll ein nach unten geneigtes, rechteckiges Vordach angebracht werden. Zur geometrischen Beschreibung des Vordaches wird ein kartesisches Koordinatensystem derart festgelegt, dass die ebene Grundfläche des Hauses in der x_1-x_2-Ebene des Koordinatensystems liegt und die vordere linke vertikale Kante des quaderförmigen Hauses entlang der x_3-Achse verläuft (siehe Skizze).



Die Befestigung des Vordachs am Haus erfolgt an den Punkten $A(0|2{,}5|3)$ und $B(0|1|3)$ sowie durch zwei Drahtseile (gepunktete Linien). Diese werden an den Punkten $C(1{,}5|1|2{,}5)$ und $D(1{,}5|2{,}5|2{,}5)$ des Vordaches angebracht und jeweils im Punkt S der Hauswand verankert. Der Punkt S ist von den Punkten A und B gleich weit entfernt.

Vernachlässigen Sie für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben die Dicke der Platte, aus der das Vordach besteht, sowie den Durchmesser der Drahtseile.

Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Verwendung von Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

6 **2.1** Geben Sie die Koordinaten aller möglichen Punkte S an, wenn die Hauswand vom Boden aus gemessen die Höhe 5 Meter aufweist.
Untersuchen Sie, ob das Dreieck CDS gleichseitig sein kann.

2.2.0 Der Anker für die beiden Drahtseile wird schließlich im Punkt $S(0|1{,}75|4)$ gesetzt.

3 **2.2.1** Ermitteln Sie, wie viele Meter Drahtseil zur Aufhängung des Vordachs mindestens bestellt werden müssen, wenn insgesamt ein halber Meter Reserve für die Befestigungen eingeplant wird.

3 **2.2.2** Berechnen Sie den Winkel, den ein Drahtseilstück mit dem Vordach einschließt. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

4 **2.2.3** Um das Vordach zu stabilisieren, soll jeweils von den Punkten C und D ausgehend eine geradlinige Stütze angebracht werden. Diese sollen senkrecht zum Vordach verlaufen. Prüfen Sie, ob diese beiden Stützen an der Hausaußenwand oder im Boden vor dem Haus verankert werden müssen.

23