Mathematik

Abiturprüfung 2019

Prüfungsteil A (CAS)

Arbeitszeit: 90 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 0{,}5 \cdot \ln(x+e)$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

3 **a)** Bestimmen Sie D_f sowie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

2 **b)** Beschreiben Sie, wie G_f schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \mapsto \ln x$ hervorgeht.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

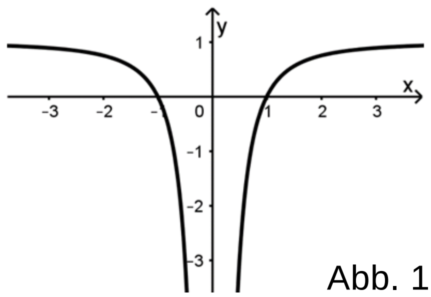


Abb. 1

1 **a)** Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

4 **b)** Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

3 Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f.

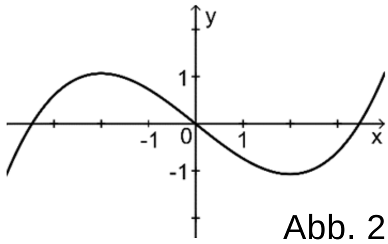


Abb. 2

3 **a)** Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an. Begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

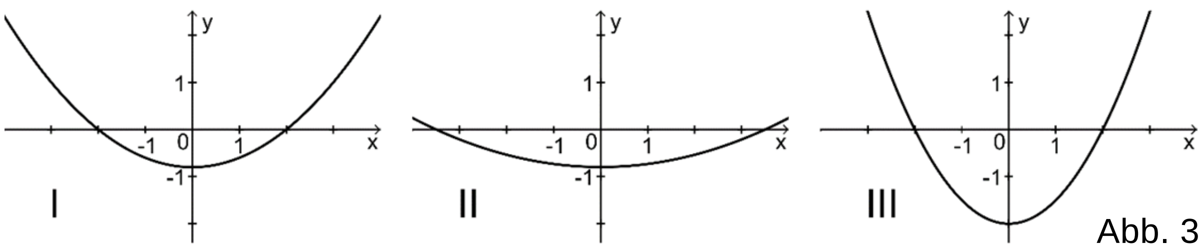


Abb. 3

2 **b)** Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **4 a)** Betrachtet wird eine Schar von Funktionen h_k mit $k \in \mathbb{R}^+$, die sich nur in ihren jeweiligen Definitionsbereichen D_k unterscheiden.
Es gilt $h_k\colon x \mapsto \cos x$ mit $D_k = [0; k]$.
Abbildung 4 zeigt den Graphen der Funktion h_7. Geben Sie den größtmöglichen Wert von k an, sodass die zugehörige Funktion h_k umkehrbar ist. Zeichnen Sie für diesen Wert von k den Graphen der Umkehrfunktion von h_k in Abbildung 4 ein und berücksichtigen Sie dabei insbesondere den Schnittpunkt der Graphen von Funktion und Umkehrfunktion.

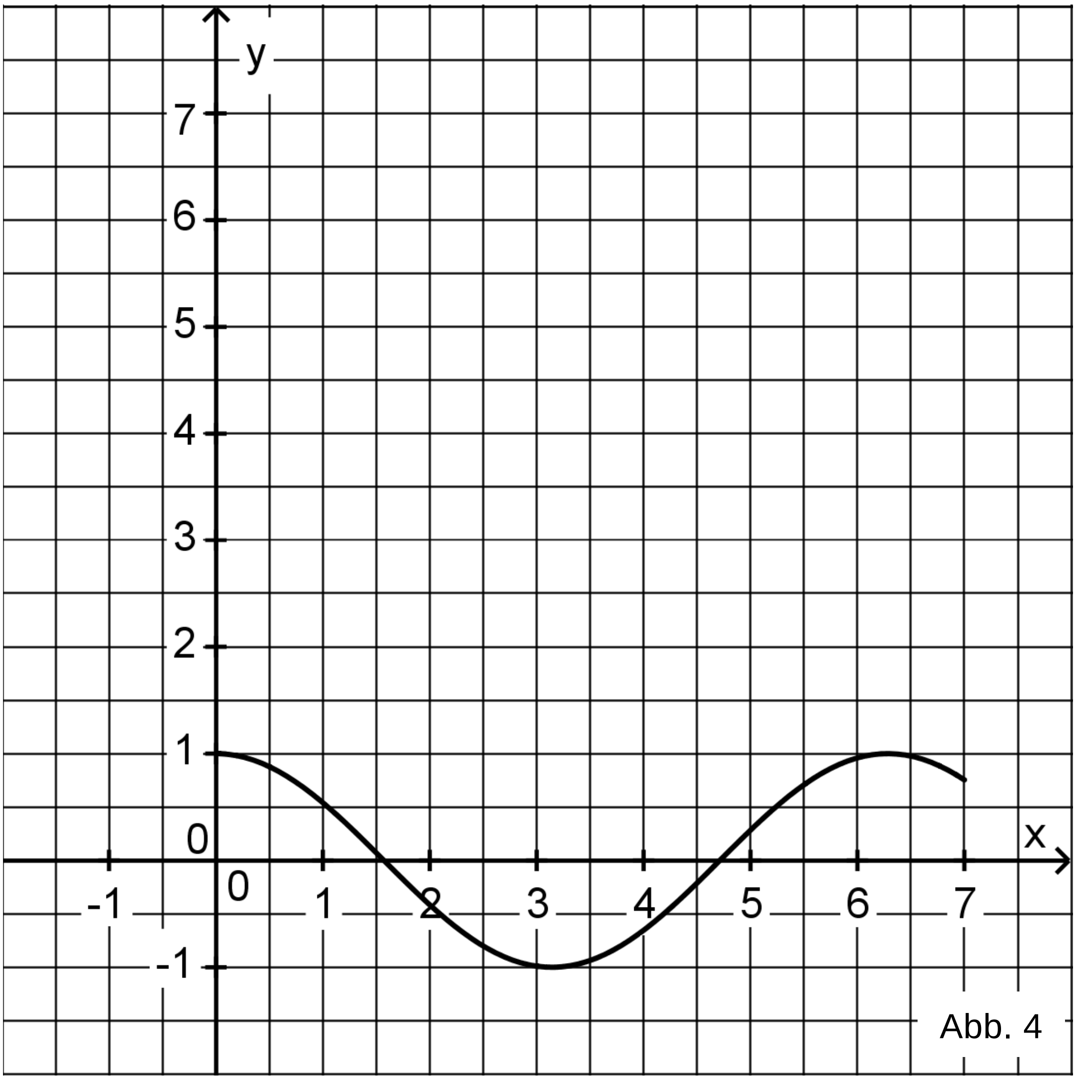


Abb. 4

2 **b)** Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten und umkehrbaren Funktion j an, die folgende Bedingung erfüllt: Der Graph von j und der Graph der Umkehrfunktion von j haben keinen gemeinsamen Punkt.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

5 **1** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{e^{2x}}{x}$ mit Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

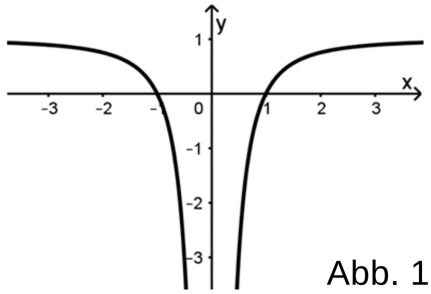


Abb. 1

1 **a)** Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

4 **b)** Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

3 Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f.

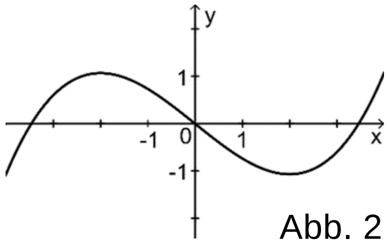


Abb. 2

3 **a)** Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an. Begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

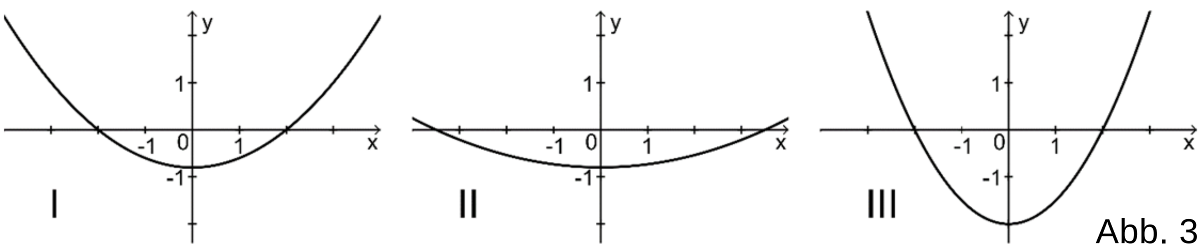


Abb. 3

2 **b)** Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{1-x^3} - 3$ und Definitionsmenge $D =]-\infty; 1]$.

2 **a)** Bestimmen Sie die Nullstelle von f.

3 **b)** Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen im Wendepunkt.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“; die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

2 **a)** Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

3 **b)** Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

3 **2** Die Zufallsgröße X kann ausschließlich die Werte 1, 4, 9 und 16 annehmen. Bekannt sind $P(X=9)=0{,}2$ und $P(X=16)=0{,}1$ sowie der Erwartungswert $E(X)=5$. Bestimmen Sie mithilfe eines Ansatzes für den Erwartungswert die Wahrscheinlichkeiten $P(X=1)$ und $P(X=4)$.

2 **3** Gegeben ist eine Bernoullikette mit der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p. Erklären Sie, dass für alle $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$ die Beziehung $B(n; p; k) = B(n; 1-p; n-k)$ gilt.

10

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

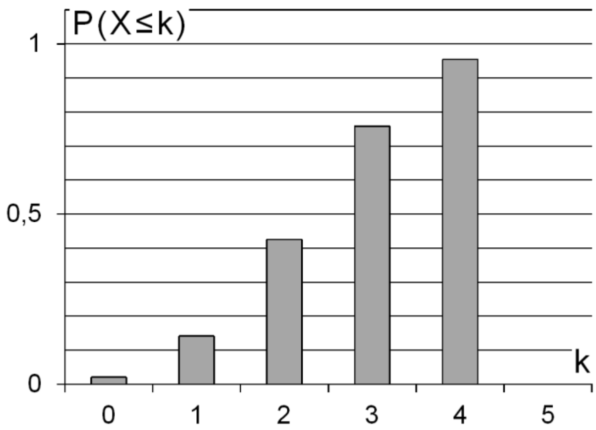
1 Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“; die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

2 **a)** Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

3 **b)** Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

2 **2** Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit dem Parameterwert $n = 5$. Dem Diagramm in Abbildung 1 kann man die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \le k)$ mit $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ entnehmen. Ergänzen Sie den zu $k = 5$ gehörenden Wahrscheinlichkeitswert im Diagramm. Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$.

Abb. 1



3 **3** Das Baumdiagramm in Abbildung 2 gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B.

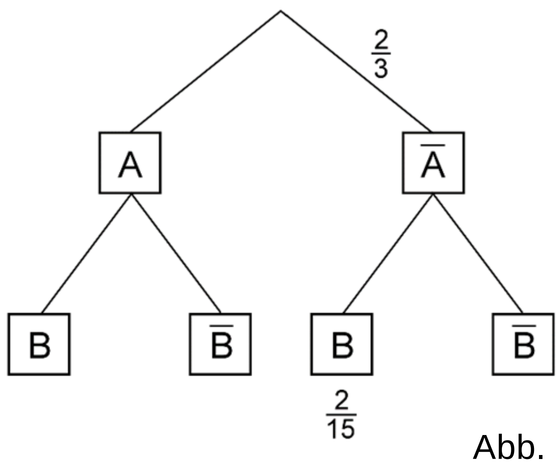


Abb. 2

10

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist ein Rechteck ABCD mit den Eckpunkten $A(5\,|\,-4\,|\,-3)$, $B(5\,|\,4\,|\,3)$, $C(0\,|\,4\,|\,3)$ und D.

3 **a)** Ermitteln Sie die Koordinaten von D und geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke $[AC]$ an.

2 **b)** Begründen Sie, dass die Dreiecke BCM und ABM den gleichen Flächeninhalt besitzen, ohne diesen zu berechnen.

2 **2** **a)** Die Ebene $E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

3 **b)** Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben sind die beiden Kugeln k_1 mit Mittelpunkt $M_1(1|2|3)$ und Radius 5 sowie k_2 mit Mittelpunkt $M_2(-3|-2|1)$ und Radius 5.

2 **a)** Zeigen Sie, dass sich k_1 und k_2 schneiden.

3 **b)** Die Schnittfigur von k_1 und k_2 ist ein Kreis. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts und den Radius dieses Kreises.

2 **2 a)** Die Ebene $E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

3 **b)** Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

10

Mathematik

Abiturprüfung 2019

Prüfungsteil B (CAS)

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.**

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____
Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Die Wassermenge in einem Staubecken kann gleichzeitig durch Zufluss und Abfluss von Wasser geändert werden. Der folgenden Tabelle können momentane Zufluss- und Abflussraten entnommen werden, die an einem Tag zu bestimmten Zeitpunkten für das Wasser in dem Staubecken gemessen wurden:

Uhrzeit	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00
Zuflussrate in $1000\frac{m^3}{h}$	4,07	5,56	7,30	5,04	1,75	0,38	0,46
Abflussrate in $1000\frac{m^3}{h}$	1,02	0,98	3,50	5,00	5,50	5,00	3,50

2 **a)** Geben Sie anhand der gegebenen Messwerte alle betrachteten Zeitpunkte an, zu denen das Wasservolumen zunahm. Begründen Sie Ihre Angabe.

Die zeitliche Entwicklung der momentanen Änderungsrate des Wasservolumens im Staubecken kann für den Zeitraum von 12:00 Uhr bis 18:00 Uhr mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = (3 - x) \cdot e^{-\frac{1}{6}x^2 + x}$ für $0 \leq x \leq 6$ modellhaft beschrieben werden. Dabei ist x die seit 12:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate in $1000\frac{m^3}{h}$.

4 **b)** Zeigen Sie, dass für den Zeitpunkt 16:00 Uhr gilt: Der Wert der momentanen Änderungsrate, den die Funktion f liefert, weicht um weniger als 2 % von dem Wert ab, der sich aus den Messungen ergibt.
Berechnen Sie den ungefähren Zeitpunkt, an dem die momentane Änderungsrate $2500\frac{m^3}{h}$ betrug.

2 **c)** Geben Sie für den Zeitraum von 12:00 Uhr bis 18:00 Uhr auf der Grundlage des Modells an, zu welchem Zeitpunkt sich die größte Wassermenge im Staubecken befand. Begründen Sie Ihre Angabe.

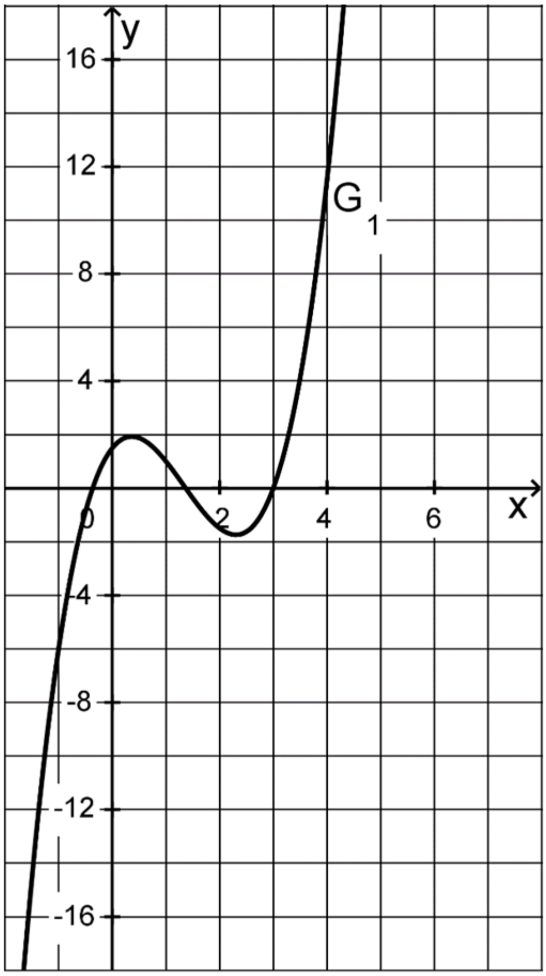
(Fortsetzung nächste Seite)

5 **d)** Das Modell, in dem f die momentane Änderungsrate des Wasservolumens beschreibt, wird durch die folgenden beiden Annahmen zur momentanen Abflussrate ergänzt:

- Für den Zeitraum zwischen 12:00 Uhr und 13:00 Uhr kann die momentane Abflussrate mit $1000\frac{m^3}{h}$ als konstant angenommen werden.
- Für den Zeitraum zwischen 13:00 Uhr und 18:00 Uhr lässt sich die zeitliche Entwicklung der momentanen Abflussrate mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s mit $s(x) = -0{,}5x^2 + 4x - 2{,}5$ beschreiben. Dabei ist $s(x)$ die momentane Abflussrate in $1000\frac{m^3}{h}$ und x die seit 12:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden.

Berechnen Sie für den Zeitraum zwischen 12:00 Uhr und 18:00 Uhr auf der Grundlage des erweiterten Modells, wie viel Wasser aus dem Staubecken abfloss und wie viel Wasser zufloss.

2 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen g_t mit $g_t(x) = (x-3)\cdot\left(x^2 - t\cdot x - \frac{t}{2}\right)$ und $t \in \mathbb{R}$. Der Graph von g_t wird mit G_t bezeichnet. Die Abbildung zeigt G_1.



5 **a)** Geben Sie für den Graphen G_6 die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die der Extrempunkte an. Skizzieren Sie G_6 in der Abbildung.

4 **b)** Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte, durch die die Graphen aller Funktionen der Schar verlaufen.

5 **c)** Ermitteln Sie alle Werte von t, für die die jeweils zugehörige Funktion g_t genau zwei verschiedene Nullstellen hat.

4 **d)** Berechnen Sie den Wert von t so, dass die Tangente an den zugehörigen Graphen G_t im Berührpunkt $(1 \mid g_t(1))$ parallel zur Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten verläuft, und geben Sie die Gleichung der Tangente an.

(Fortsetzung nächste Seite)

5 **e)** Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts W_t von G_t in Abhängigkeit von t. Bestimmen Sie alle Werte von t, für die W_t auf einer Koordinatenachse liegt.

Rotiert ein Flächenstück, das vom Graphen einer in $[a;b]$ definierten Funktion g, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird, um die x-Achse, so entsteht ein rotationssymmetrischer Körper mit dem Volumen $V = \pi \cdot \int_a^b (g(x))^2 \, dx$.

2 **f)** Der Graph G_6, die x-Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = 6$ schließen im Bereich $0 \le x \le 6$ zwei Flächenstücke ein. Rotieren diese beiden Flächenstücke um die x-Achse, so entstehen zwei Körper. Bestimmen Sie die Volumina der beiden Körper.

2 **g)** Zeigen Sie, dass folgende Aussage falsch ist:
Für je zwei inhaltsgleiche Flächenstücke, die um die x-Achse rotieren, stimmen die Volumina der beiden entstehenden Körper überein.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_{a,b}\colon\ x \mapsto -a \cdot \ln(b \cdot x)$ mit $a > 0$, $b > 0$ und maximaler Definitionsmenge $D_{a,b}$. Der Graph von $f_{a,b}$ wird mit $G_{a,b}$ bezeichnet.

2 **a)** Geben Sie $D_{a.b}$ und das Verhalten von $f_{a.b}$ für $x \to +\infty$ an.

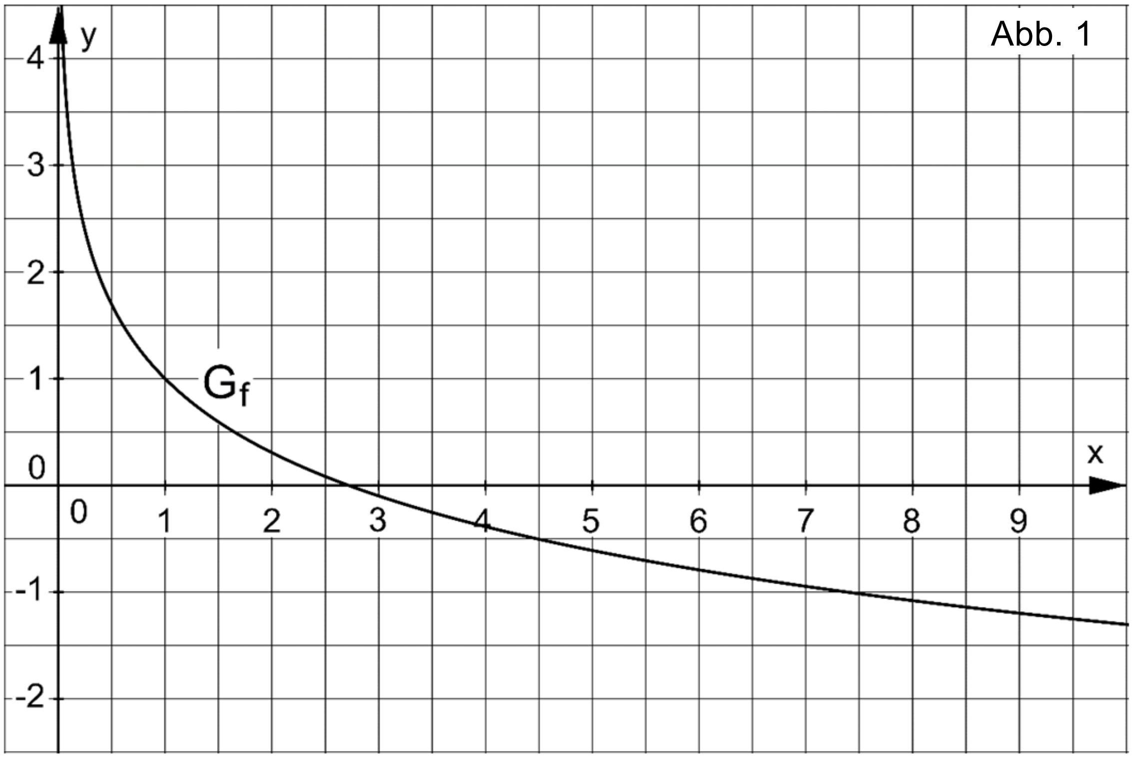
3 **b)** Geben Sie die Wertemenge von $f_{a,b}$ an und begründen Sie, dass der Graph von $f_{a.b}$ streng monoton fällt.

6 **c)** Die Gerade mit der Gleichung $x = \frac{1}{2b}$, der Graph von $f_{a,b}$ und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück. Die Tangente an $G_{a,b}$ durch den Schnittpunkt von $G_{a,b}$ mit der x-Achse teilt dieses Flächenstück in zwei Teilflächen. Weisen Sie nach, dass das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Teilflächen unabhängig von a und b ist.

2 **d)** Für einen bestimmten Wert von a und einen bestimmten Wert von b hat der zugehörige Graph $G_{a,b}$ im Punkt $(1|1)$ die Steigung -1. Bestimmen Sie diese Werte.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Die Funktion der Schar $f_{a,b}$ aus Aufgabe 1 mit $a = 1$ und $b = \frac{1}{e}$ wird mit f bezeichnet. Der Funktionsterm von f lautet somit $f(x) = -\ln\left(\frac{x}{e}\right)$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.



2 **a)** Beschreiben Sie, wie G_f aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \mapsto \ln x$ hervorgeht.

2 **b)** Begründen Sie ausschließlich anhand des Graphen von f, dass der Graph jeder Stammfunktion von f einen Hochpunkt hat.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion F mit $F(x) = 2x - x \cdot \ln(x) + 1$.

6 **c)** Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen G_F von F und zeichnen Sie G_F in Abbildung 1 ein.

3 **d)** Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion H_c mit $H_c(x) = F(x) + c$ und $x > 0$ eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Intervall maximaler Länge für den Wert des Parameters c an, sodass H_c genau zwei Nullstellen hat.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Die in IR_0^+ definierte Funktion p mit $p(x) = 1013 \cdot e^{-\frac{x}{8{,}44}}$ beschreibt modellhaft die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe. Dabei bezeichnen $p(x)$ den Luftdruck in Hektopascal (hPa) und x die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern (km) (im Weiteren kurz als Höhe bezeichnet).

4 **a)** Begründen Sie, dass die Funktion p umkehrbar ist, und geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von p an.

Für die Umkehrfunktion h von p gilt $h(x) = -8{,}44 \cdot \ln\left(\frac{x}{1013}\right)$.
Der Funktionsterm $h(x)$ entspricht somit dem der Funktion $f_{a,b}$ der Schar von Aufgabe 1 mit den Parameterwerten $a = 8{,}44$ und $b = \frac{1}{1013}$.
Abbildung 2 zeigt den Graphen von h für $250 \leq x \leq 1013$.

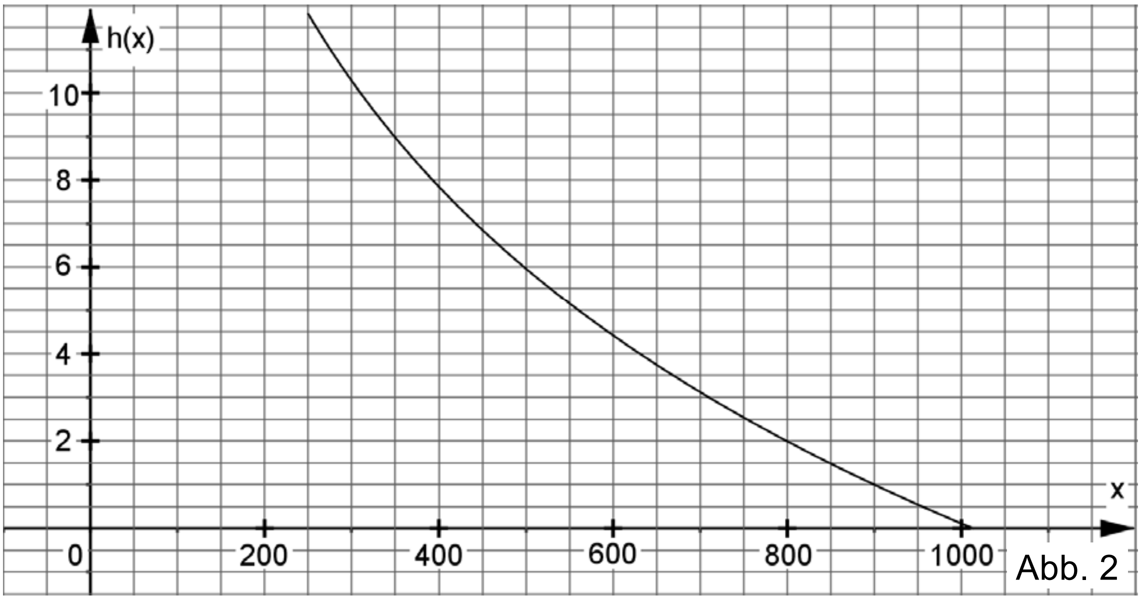


Abb. 2

2 **b)** Geben Sie die Nullstelle von h und deren Bedeutung im Sachzusammenhang an.

4 **c)** Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von h im Intervall $[550; 950]$ und veranschaulichen Sie diese Änderungsrate in Abbildung 2. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser mittleren Änderungsrate im Sachzusammenhang.

4 **d)** Bei einer alternativen Modellierung wird die Funktion h durch die in IR^+ definierte Funktion $\tilde{h}\colon x \mapsto \tilde{h}(x)$ ersetzt. Beschreiben Sie schrittweise, wie man die maximale Differenz der Funktionswerte $\tilde{h}(x)$ und $h(x)$ im Bereich $250 \leq x \leq 1013$ bestimmen kann.

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff, das Platz für 60 Fahrgäste bietet.

4 **1** Betrachtet wird eine Fahrt, bei der das Schiff voll besetzt ist. Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene, Jugendliche und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Jugendlichen und Kindern 75 %. Berechnen Sie, wie viele Erwachsene an der Fahrt teilnehmen, sowie die Anzahl der Jugendlichen und Kinder, die kein Eis essen.

2 Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen, ohne dabei schon den Fahrpreis bezahlen zu müssen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen mit Reservierung, die nicht zur Fahrt erscheinen. Vereinfachend soll angenommen werden, dass X binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

1 **a)** Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei der Annahme, die Zufallsgröße X ist binomialverteilt, im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt.

3 **b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss.

3 **c)** Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, höchstens ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau.

(Fortsetzung nächste Seite)

Das Unternehmen richtet ein Online-Portal zur Reservierung ein und vermutet, dass dadurch der Anteil der Personen mit Reservierung, die zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen, zunehmen könnte. Als Grundlage für die Entscheidung darüber, ob pro Fahrt künftig mehr als 64 Reservierungen zugelassen werden, soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt höchstens 10 %." mithilfe einer Stichprobe von 200 Personen mit Reservierung auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der für eine Fahrt möglichen Reservierungen nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

4 **d)** Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

3 **e)** Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse, dass weniger Plätze frei bleiben sollen, oder das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund stand. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

2 **f)** Beschreiben Sie den zugehörigen Fehler zweiter Art sowie die daraus resultierende Konsequenz im Sachzusammenhang.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

1 Jeder sechste Besucher eines Volksfests trägt ein Lebkuchenherz um den Hals. Während der Dauer des Volksfests wird 25-mal ein Besucher zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Besucher, die ein Lebkuchenherz tragen.

4 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: „Höchstens einer der ausgewählten Besucher trägt ein Lebkuchenherz."

B: „Der sechste ausgewählte Besucher ist der erste, der ein Lebkuchenherz trägt."

2 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{i=5}^{8} B\left(25; \frac{1}{6}; i\right)$ berechnet werden kann.

3 **c)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Zufallsgröße X höchstens um eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

4 **2** Bei einer Losbude wird damit geworben, dass jedes Los gewinnt. Die Lose und die zugehörigen Sachpreise können drei Kategorien zugeordnet werden, die mit „Donau", „Main" und „Lech" bezeichnet werden. Im Lostopf befinden sich viermal so viele Lose der Kategorie „Main" wie Lose der Kategorie „Donau". Ein Los kostet 1 Euro. Die Inhaberin der Losbude bezahlt im Einkauf für einen Sachpreis in der Kategorie „Donau" 8 Euro, in der Kategorie „Main" 2 Euro und in der Kategorie „Lech" 20 Cent. Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der Lose der Kategorie „Donau" sein muss, wenn die Inhaberin im Mittel einen Gewinn von 35 Cent pro Los erzielen will.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Die Inhaberin der Losbude beschäftigt einen Angestellten, der Besucher des Volksfests anspricht, um diese zum Kauf von Losen zu animieren. Sie ist mit der Erfolgsquote des Angestellten unzufrieden.

5 **a)** Die Inhaberin möchte dem Angestellten das Gehalt kürzen, wenn weniger als 15 % der angesprochenen Besucher Lose kaufen. Die Entscheidung über die Gehaltskürzung soll mithilfe eines Signifikanztests auf der Grundlage von 100 angesprochenen Besuchern getroffen werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dem Angestellten das Gehalt zu Unrecht zu kürzen. Geben Sie die entsprechende Nullhypothese an und ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von 10 %.

2 **b)** Der Angestellte konnte bei der Durchführung des Tests zehn von 100 erwachsenen Besuchern dazu animieren, Lose zu kaufen. Er behauptet, dass er zumindest bei Personen mit Kind eine Erfolgsquote größer als 10 % habe. Unter den 100 angesprochenen Besuchern befanden sich 40 Personen mit Kind. Von den Personen ohne Kind zogen 54 kein Los. Überprüfen Sie, ob das Ergebnis der Stichprobe die Behauptung des Angestellten stützt.

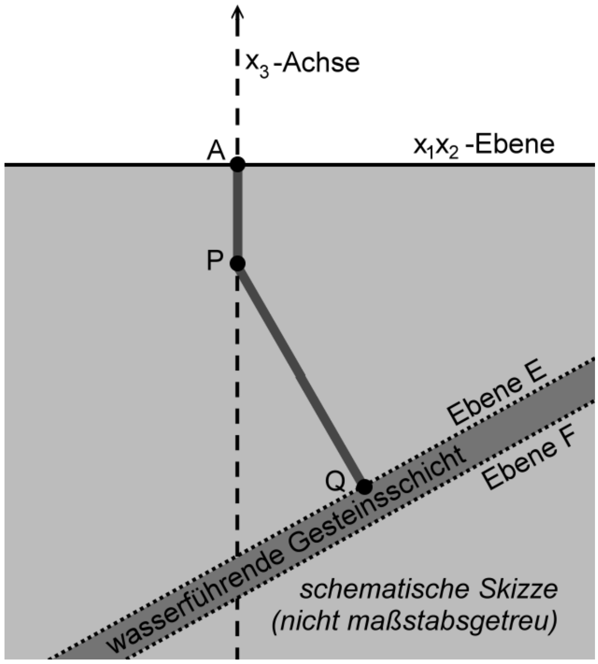
20

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Eine Geothermieanlage fördert durch einen Bohrkanal heißes Wasser aus einer wasserführenden Gesteinsschicht an die Erdoberfläche. In einem Modell entspricht die x_1x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems der horizontal verlaufenden Erdoberfläche. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität. Der Bohrkanal besteht aus zwei Abschnitten, die im Modell vereinfacht durch die Strecken $[AP]$ und $[PQ]$ mit den Punkten $A(0|0|0)$, $P(0|0|-1)$ und $Q(1|1|-3{,}5)$ beschrieben werden (vgl. Abbildung).



2 **a)** Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Gesamtlänge des Bohrkanals auf Meter gerundet.

3 **b)** Beim Übergang zwischen den beiden Abschnitten des Bohrkanals muss die Bohrrichtung um den Winkel geändert werden, der im Modell durch den Schnittwinkel der beiden Geraden AP und PQ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Größe dieses Winkels.

Im Modell liegt die obere Begrenzungsfläche der wasserführenden Gesteinsschicht in der Ebene E und die untere Begrenzungsfläche in einer zu E parallelen Ebene F. Die Ebene E enthält den Punkt Q. Die Strecke $[PQ]$ steht senkrecht auf der Ebene E (vgl. Abbildung).

2 **c)** Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(zur Kontrolle: $E: 4x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 43 = 0$)

6 **d)** Der Bohrkanal wird geradlinig verlängert und verlässt die wasserführende Gesteinsschicht in einer Tiefe von 3600 m unter der Erdoberfläche. Die Austrittsstelle wird im Modell als Punkt R auf der Geraden PQ beschrieben. Bestimmen Sie die Koordinaten von R und ermitteln Sie die Dicke der wasserführenden Gesteinsschicht auf Meter gerundet.

(zur Kontrolle: x_1- und x_2-Koordinate von R: 1,04)

(Fortsetzung nächste Seite)

Ein zweiter Bohrkanal wird benötigt, durch den das entnommene Wasser abgekühlt zurück in die wasserführende Gesteinsschicht geleitet wird. Der Bohrkanal soll geradlinig und senkrecht zur Erdoberfläche verlaufen. Für den Beginn des Bohrkanals an der Erdoberfläche kommen nur Bohrstellen in Betracht, die im Modell durch einen Punkt $B(t\,|\,-t\,|\,0)$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschrieben werden können.

3 **e)** Zeigen Sie rechnerisch, dass der zweite Bohrkanal die wasserführende Gesteinsschicht im Modell im Punkt $T(t\,|\,-t\,|\,-4{,}3)$ erreicht, und erläutern Sie, wie die Länge des zweiten Bohrkanals bis zur wasserführenden Gesteinsschicht von der Lage der zugehörigen Bohrstelle beeinflusst wird.

4 **f)** Aus energetischen Gründen soll der Abstand der beiden Stellen, an denen die beiden Bohrkanäle auf die wasserführende Gesteinsschicht treffen, mindestens 1500 m betragen.

α) Entscheiden Sie auf der Grundlage des Modells, ob diese Bedingung für jeden möglichen zweiten Bohrkanal erfüllt wird.

β) Für bestimmte mögliche Bohrstellen des zweiten Bohrkanals beträgt dieser Abstand 2000 m. Bestimmen Sie die Koordinaten der zugehörigen Punkte B im Modell.

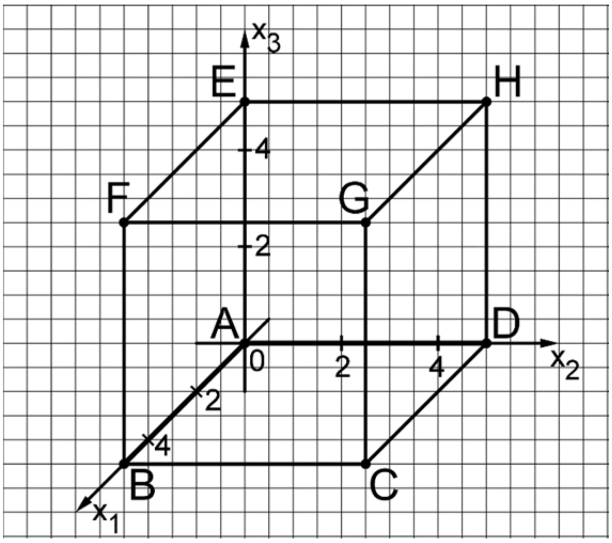
20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$.



4 **a)** Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein und zeigen Sie, dass es sich um ein Trapez handelt, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

4 **b)** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Normalenform. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Ebene T die x_2x_3-Ebene schneidet.

(zur Kontrolle: $T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$)

Für $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Gerade $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

2 **c)** Bestimmen Sie den Wert von a, sodass die Gerade g_a die Würfelfläche CDHG in ihrem Mittelpunkt schneidet.

Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ liegt die Gerade g_a in der Ebene U mit der Gleichung $x_1 = 2{,}5$.

2 **d)** Ein beliebiger Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ des Raums wird an der Ebene U gespiegelt. Geben Sie die Koordinaten des Bildpunkts P' in Abhängigkeit von p_1, p_2 und p_3 an.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **e)** Spiegelt man die Ebene T an U, so erhält man die von T verschiedene Ebene T'. Zeigen Sie, dass für einen bestimmten Wert von a die Gerade g_a in der Ebene T liegt, und begründen Sie, dass diese Gerade g_a die Schnittgerade von T und T' ist.

4 **f)** Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche IJKL liegt auf der Kante $[FG]$. Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide 2 betragen kann.

20