Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2019

Prüfungsfach:	**Mathematik** **(nichttechnische Ausbildungsrichtungen)**
Prüfungstag:	**Donnerstag, 06. Juni 2019**
Prüfungsdauer:	**9:00 Uhr – 12:00 Uhr**
Hilfsmittel:	**Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner;** **Merkhilfe LPPLUS Mathematik (Technik)**
Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule. Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.
Bewertungsschlüssel:	

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

Aufgabe I

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion f durch ihre Funktionsgleichung

$f(x) = -\frac{2}{15}(x^4 - 10x^3 + 24x^2)$ und ihre Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f und geben Sie ihre jeweilige Vielfachheit an. 3

1.2 Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von f. Runden Sie die Koordinaten ggf. auf eine Nachkommastelle. 6

1.3 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f. 6

[Teilergebnis: $W_1(1 \mid f(1))$; $W_2(4 \mid f(4))$]

1.4 Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $-1 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 4

1.5 Weisen Sie nach, dass die beiden Wendepunkte von G_f auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$ liegen und zeichnen Sie die Gerade g in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.4 ein. 2

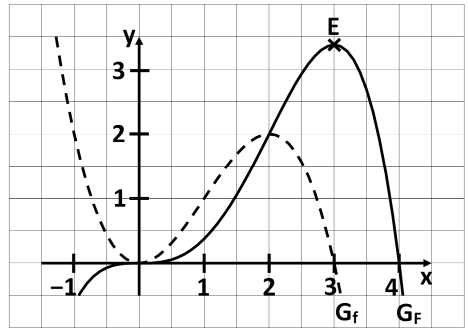
1.6 Die Gerade g, der Graph G_f und die x-Achse schließen im IV. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der graphischen Darstellung aus Aufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. 4

25

Aufgabe II

BE

2.0 Die nebenstehende Abbildung zeigt den Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion dritten Grades f und den Ausschnitt des Graphen G_F einer Stammfunktion von f mit $D_F = D_f = \mathbb{R}$.
Die Nullstellen der Funktionen f und F sowie die Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_f sind ganzzahlig und können aus der Abbildung abgelesen werden.



2.1 Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Funktionsgleichung der Funktion f in faktorisierter Form $f(x)=a\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)$ und weisen Sie rechnerisch nach, dass sich diese Gleichung folgendermaßen darstellen lässt: $f(x)=-0{,}5x^3+1{,}5x^2$. 4

2.2 Die Funktion f besitzt unendlich viele Stammfunktionen. Weisen Sie nach, dass diese Stammfunktionen den Funktionsterm $-0{,}125x^4+0{,}5x^3+C$ mit $C\in\mathbb{R}$ haben und geben Sie den Wert der Konstanten C für die Funktion F an. 2

2.3 Berechnen Sie die Koordinaten des einzigen Extrempunktes E von G_F sowie die Koordinaten der beiden Wendepunkte W_1 und W_2 von G_F.
[mögliches Teilergebnis: $W_2(2|F(2))$] 5

2.4 Die Graphen von f und F schließen im I. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl A des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. 4

2.5 Die Gerade g mit der Gleichung y = x schneidet im Bereich $0\le x\le 4$ den Graphen von F an drei Stellen. Berechnen Sie die Koordinaten dieser drei Schnittpunkte. 6

2.6 Geben Sie jeweils mithilfe der Abbildung aus 2.0 an, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. 4

a) Die relativen Extrempunkte des Graphen von f sind gleichzeitig auch Wendepunkte von G_F.

b) Der Wendepunkt von G_F im Ursprung des Koordinatensystems ist ein Terrassenpunkt von G_F.

c) $\int_0^3 f(x)\,dx = 5$

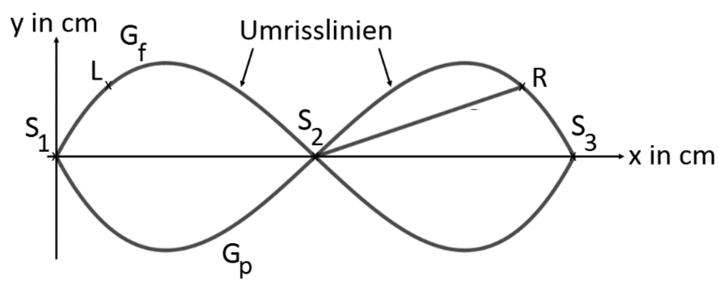
d) Die Wendetangente an G_F im Wendepunkt W_2 (siehe Aufgabe 2.3) hat die Steigung 2.

25

Aufgabe III

BE

3.0 Ein Modeschmuckhersteller möchte seine Kollektion um einen ebenen Anhänger für Halsketten erweitern. Ein Designer hat bereits einen Entwurf dafür gezeichnet (siehe Skizze). Ein Koordinatensystem wird wie in der Planungsskizze ersichtlich festgelegt.



Die Umrisslinien des Anhängers können mithilfe der ganzrationalen Funktionen dritten Grades f und p beschrieben werden. An den Umrisslinien befinden sich die Befestigungspunkte $L(0{,}2|0{,}27)$ und $R(1{,}8|0{,}27)$, in welchen der Anhänger an einer Kette angebracht werden kann. Weiterhin besitzen die beiden Umrisslinien die gemeinsamen Punkte $S_1(0|0)$, $S_2(1|0)$ und $S_3(2|0)$ und es gilt: $f(x) = -p(x)$ mit $D_f = D_p = [0;2]$. Außerdem teilt die Strecke $\overline{S_2R}$ die rechte Hälfte des Anhängers in einen „oberen“ und einen „unteren“ Bereich.
Die Werte der Variablen x und die Funktionswerte der Funktionen f und p stellen Längenangaben in der Einheit Zentimeter dar. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen soll verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.

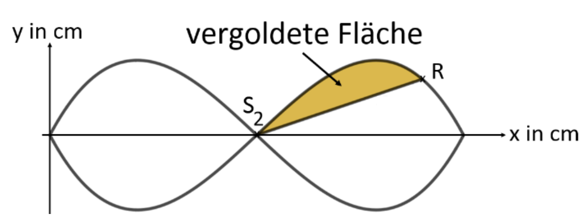
3.1 Mithilfe eines Computerprogramms wird ein Modell des Anhängers erstellt. Bestimmen Sie hierfür die Funktionsgleichungen von f und p. 5

[mögliches Teilergebnis: $f(x) = \frac{15}{16}(x^3 - 3x^2 + 2x)$]

3.2 Die Gerade g verläuft durch S_2 und R. Ermitteln Sie die Gleichung dieser Geraden. 2

[mögliches Ergebnis: $y = \frac{27}{80}x - \frac{27}{80}$]

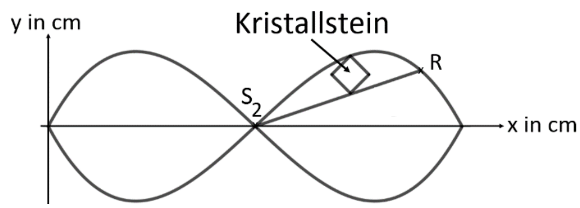
3.3 Für eine 1. Variante des Anhängers wird der obere Bereich der rechten Hälfte des Anhängers vergoldet (siehe Skizze). Dabei soll der Flächeninhalt der vergoldeten Fläche maximal 10 mm² betragen. Weisen Sie nach, dass diese Bedingung erfüllt ist. 5



(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe III **(Fortsetzung)** **BE**

3.4.0 Bei der 2. Variante soll anstelle der Vergoldung im oberen Bereich der rechten Hälfte des Anhängers ein möglichst großer quadratischer Kristallstein Platz finden, dessen Diagonalen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen (siehe Skizze). Der Mittelpunkt (Schnittpunkt der Diagonalen) des Steines mit dem größtmöglichen Flächeninhalt befindet sich an der Stelle $x = 1{,}46$ (Nachweis nicht erforderlich!).

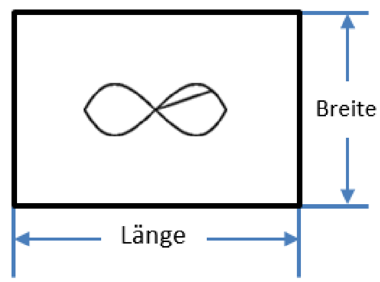


3.4.1 Bestimmen Sie für die exakte Positionierung des größtmöglichen Kristallsteins die Koordinaten der vier Eckpunkte dieses Steines. 4

3.4.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Steines in der Einheit mm^2. 3

3.5 Der Modeschmuckhersteller verpackt den Anhänger in einer quaderförmigen Deko-Schachtel. Dabei wird der Anhänger wie in der nebenstehenden, nicht maßstabsgetreuen Abbildung (Ansicht von oben) mittig in die Schachtel hineingelegt. Der Anhänger soll nach allen Seiten hin mindestens 1 cm Abstand zu den Rändern der Schachtel besitzen. 6

Berechnen Sie die minimale Länge und Breite der Schachtel.



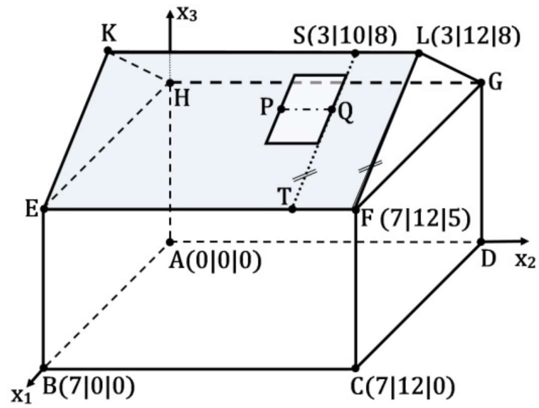
Aufgabe IV

		BE
4.0	Ein Unternehmen möchte die Warmhalteeigenschaften eines Coffee-to-go-Bechers (Mehrweg) untersuchen. Der zeitliche Verlauf der Temperatur des Kaffees beim Abkühlprozess kann näherungsweise durch die Funktion T beschrieben werden. Die Funktionsgleichung von T ergibt sich aus dem Newtonschen Abkühlungsgesetz: Bei einer Umgebungstemperatur von 21°C, einer Einfülltemperatur von 85°C und unter Berücksichtigung der sogenannten Abkühlkonstante, die für diesen Becher $0{,}04\ \text{min}^{-1}$ beträgt, lautet sie $T(t)=(85-21)\cdot e^{-0{,}04t}+21$ mit $D_T=[0;\infty[$ (Temperatur T in °C, Zeit t in Minuten ab dem Einfüllen zum Zeitpunkt $t_0=0$). Unter den genannten Bedingungen sollen nun Modellrechnungen durchgeführt werden. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf eine Nachkommastelle.	
4.1	Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Temperatur des Kaffees, bezogen auf die Einfülltemperatur, 30 Minuten nach dem Einfüllen gesunken ist.	4
4.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von T für $t\to\infty$. Interpretieren Sie den Grenzwert im Sachzusammenhang.	3
4.3	Zeichnen Sie den Graphen von T für $0\le t\le 50$ sowie die waagrechte Asymptote des Graphen in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie hierzu einen geeigneten Maßstab.	5
4.4	Die optimale Trinktemperatur des Kaffees liegt zwischen 60°C und 70°C. Berechnen Sie die Mindestwartezeit für das Trinken des Kaffees ab dem Einfüllen des Kaffees in den Becher sowie den Zeitpunkt, zu dem der Kaffee spätestens getrunken sein sollte.	5
4.5	Ein Maß dafür, wie schnell eine Flüssigkeit abkühlt, ist die Abkühlgeschwindigkeit. Die Abkühlgeschwindigkeit der Flüssigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1 ergibt sich als Funktionswert $T'(t_1)$ der ersten Ableitungsfunktion von T. Berechnen Sie die Abkühlgeschwindigkeit zu den Zeitpunkten $t_1=5$ min und $t_2=25$ min. Formulieren Sie eine Erkenntnis in Worten, die sich durch den Vergleich der beiden Abkühlgeschwindigkeiten ergibt. [mögliches Teilergebnis: $T'(t)=-2{,}56\cdot e^{-0{,}04t}$]	5
4.6	Bei anderen Umgebungstemperaturen als 21°C muss der entsprechende Zahlenwert in der unter 4.0 gegebenen Funktionsgleichung durch die neue Umgebungstemperatur ersetzt werden. Überprüfen Sie, ob bei einer Umgebungstemperatur von 10°C der Kaffee 10 Minuten nach dem Einfüllen noch mindestens 60°C warm ist.	3
		25

Aufgabe V

BE

5.0 Zur geometrischen Beschreibung eines Hauses wird ein kartesisches Koordinatensystem festgelegt. Nebenstehende Abbildung (nicht maßstabsgetreu) zeigt modellhaft dieses Haus, das auf einer ebenen, horizontalen Fläche steht. Die Punkte ABCDEFGH sind die Eckpunkte eines Quaders. Die Strecke $\overline{KL}$ stellt den Dachfirst, die Strecke $\overline{EF}$ die untere Dachkante dar. Die x_1-Achse ist nach Süden und die x_2-Achse ist nach Osten orientiert. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.



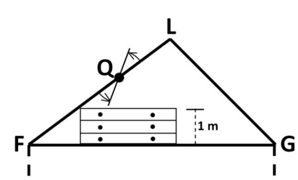
5.1 Die südliche Dachfläche wird im Modell durch das Rechteck EFLK dargestellt. Geben Sie die Koordinaten des Punktes K an und berechnen Sie den Inhalt der südlichen Dachfläche. 5

5.2 Auf der südlichen Dachfläche soll eine Photovoltaikanlage montiert werden. In Deutschland geht man aufgrund der Sonneneinstrahlung von einer optimalen Dachneigung von 30° bis 35° gegenüber der Horizontalen aus. Überprüfen Sie, ob das betrachtete Haus einen passenden Dachneigungswinkel $\sphericalangle GFL$ aufweist. 5

5.3 Für ein Verkehrswertgutachten soll das Volumen des Hauses berechnet werden. Ermitteln Sie den Wert des Hauses anhand der vereinfachten Annahme, dass ein Kubikmeter Hausvolumen mit 400,00 EUR veranschlagt wird und das Volumen des Dachgeschosses für die Wertermittlung nur zu einem Drittel berücksichtigt wird. 6

5.4 Es ist geplant, auf der südlichen Dachfläche ein rechteckiges Dachfenster mit 2 m Länge und 1 m Breite einzubauen. Die Fensterränder verlaufen parallel zum Dachfirst bzw. zur östlichen Dachkante $\overline{FL}$. Das Fenster hat vom Dachfirst 1 m und von der östlichen Dachkante 2 m Abstand. Der Punkt Q befindet sich in der Mitte des östlichen Fensterrands. Berechnen Sie die Koordinaten von Q.
[mögliches Ergebnis: $Q(4{,}6\,|\,10\,|\,6{,}8)$] 5

5.5 Das Dachfenster ist drehbar um eine Achse, die durch die Strecke $\overline{PQ}$ festgelegt wird. Die Konstruktion des Drehgelenks erlaubt eine nahezu vollständige Drehung des Fensters. Begründen Sie, ob das Fenster auch dann noch vollständig gedreht werden kann, wenn eine Kommode mit einer Höhe von 1 m genau unterhalb des Fensters steht. 4



Ansicht des Dachgeschosses von Osten
(nicht maßstabsgetreu)

25