Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2019

Prüfungsfach:	**Mathematik** **(technische Ausbildungsrichtung)**
Prüfungstag:	**Donnerstag, 06. Juni 2019**
Prüfungsdauer:	**9:00 Uhr – 12:00 Uhr**
Hilfsmittel:	**Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner;** **Merkhilfe LPPLUS Mathematik (Technik)**
Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule. Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.
Bewertungsschlüssel:	

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

Aufgabe I

BE

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion f durch ihre Funktionsgleichung $f(x)=2(x+2)\cdot e^{-\frac{x}{4}}$ auf der Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f, den Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x\to-\infty$ und $x\to+\infty$. Geben Sie die Art und die Gleichung der Asymptote von G_f an. 5

1.2 Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunkts von G_f. 5
[mögliches Zwischenergebnis: $f'(x)=\left(-\frac{1}{2}x+1\right)\cdot e^{-\frac{x}{4}}$]

1.3 Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f. 3

1.4 Zeichnen Sie die Graphen von f und f' unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte sowie die Asymptote von G_f für $-2{,}5<x\leq 10$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 5

1.5 Geben Sie an, welche besondere Bedeutung die Stelle $x=2$ für die Funktionen f und f' hat. 2

1.6 Die Funktion F, gegeben durch ihre Gleichung $F(x)=-\left(8x+48\right)\cdot e^{-\frac{x}{4}}$, ist eine Stammfunktion der Funktion f. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich. 5
Die Graphen der Funktionen f und f' und die y-Achse begrenzen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück.
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung aus Aufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl A des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

25

Aufgabe II

BE

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto f(x) = \frac{3x+1}{x^2-1}$ auf ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

2.1 Geben Sie die Definitionsmenge D_f an und bestimmen Sie alle vorhandenen Nullstellen der Funktion f. 2

2.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ sowie in der Umgebung der Definitionslücken. 6
Geben Sie jeweils die Art und die Gleichung von allen Asymptoten von G_f an.

2.3 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und weisen Sie nach, dass der Graph G_f keine relativen Extrempunkte besitzt. 4
[mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{-3x^2-2x-3}{(x^2-1)^2}$]

2.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte sowie alle Asymptoten von G_f mindestens im Bereich $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 5
(Maßstab: x-Achse: 1 LE $= 1$ cm; y-Achse: 1 LE $= 1$ cm)

2.5 Zeigen Sie, dass sich die Gleichung der Funktion f auch in der Form $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$ darstellen lässt. 2

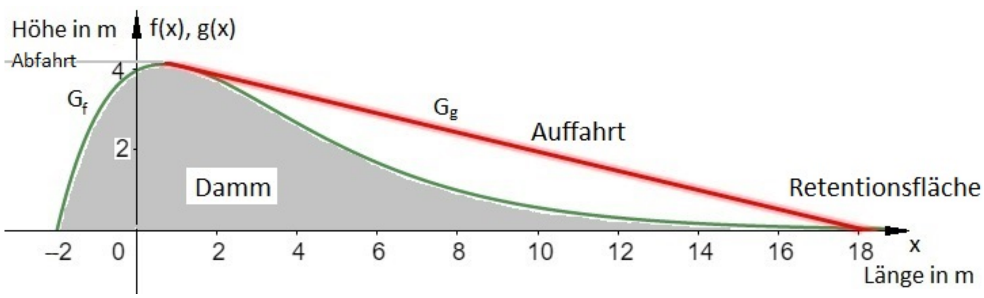
2.6 Der Graph G_f, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = 1{,}5$ und $x = 3$ schließen ein endliches Flächenstück ein. 6
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung aus Aufgabe 2.4 und zeigen Sie, dass die Maßzahl A des Flächeninhalts dieses Flächenstücks $A = \ln\left(\frac{128}{5}\right)$ beträgt.

25

Aufgabe III

BE

3.0 Bei sehr starken Regenschauern entstehen vor allem bei begradigten Flussläufen Hochwasserwellen, die den Pegelstand dieser Flüsse ggf. sehr schnell ansteigen lassen. Um flussabwärts den Anstieg des Pegelstands abzumildern, gibt es flussaufwärts künstlich angelegte Überschwemmungsgebiete (sogenannte Retentionsflächen). Auf diesen kann sich das Wasser verteilen. Dadurch findet flussabwärts ein gleichmäßiger Wasserabfluss statt. Gleichzeitig muss aber verhindert werden, dass Siedlungen, welche an Retentionsflächen angrenzen, überschwemmt werden. Hierzu soll ein Damm zwischen einer Siedlung und einer Überschwemmungsfläche gebaut werden (siehe nachfolgende Planungsskizze).



Zur Beschreibung des Dammes wird sein vertikaler Querschnitt betrachtet und ein kartesisches Koordinatensystem derart festgelegt, dass die obere Begrenzungslinie des Querschnitts des Damms durch den Graphen G_f einer Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{3}{8}x + \frac{6}{5}} \cdot (x+2)$ auf einem sinnvollen Definitionsbereich D_f beschrieben wird. Dabei sind die Werte von x und die Funktionswerte von f Längenangaben in der Einheit Meter.
Auf die Mitführung von Einheiten während der Berechnung kann verzichtet werden.

3.1 Im Zuge des Genehmigungsverfahrens muss die maximal mögliche Höhe des Wasserstandes, bevor der Damm überspült wird, angegeben werden. Berechnen Sie diese gerundet auf zwei Nachkommastellen. 6

[mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{3}{40} \cdot (2-3x) \cdot e^{-\frac{3}{8}x + \frac{6}{5}}$]

3.2 Je steiler der Damm verläuft, desto höher ist die Gefahr, dass Erdreich am Hang auf der wasserzugewandten Seite ($x \geq \frac{2}{3}$) durch Beanspruchung abrutscht. Deshalb ist es wichtig zu wissen, wo der Damm auf dieser Seite die größte Steigung aufweist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes in obigem Koordinatensystem, in dem die obere Begrenzungslinie des Damms auf der wasserzugewandten Seite betragsmäßig die größte Steigung hat und berechnen Sie diesen maximalen Betrag der Steigung am Damm. Runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen. 6

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe III **(Fortsetzung)** **BE**

3.3.0 Um mit landwirtschaftlichen Maschinen über den Damm fahren zu können, wird eine 10 Meter breite Überfahrrampe gebaut, indem Material aufgeschüttet wird. Im Querschnitt (siehe Skizze) ist die geradlinig verlaufende Fahrbahn als Linie zwischen den Punkten $P_1(1|f(1))$ und $P_2(18|f(18))$ ersichtlich.

3.3.1 Berechnen Sie die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte P_1 und P_2 festgelegt wird und geben Sie damit den Betrag der Steigung der Fahrbahn an.
Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma. 3

3.3.2 Zeigen Sie, dass $F: x \to -\frac{8}{15}\cdot(3x+14)\cdot e^{-\frac{3}{8}x+\frac{6}{5}}$, mit $D_F = D_f$ eine Stammfunktion von f ist. 3

3.3.3 Berechnen Sie das Volumen des Raums, welcher mit Material aufgeschüttet werden muss, um die Rampe zu bauen. Runden Sie das Volumen auf zwei Stellen nach dem Komma. 4

3.3.4 Ein Kubikmeter des zur Aufschüttung verwendeten Materials hat die Masse 1,8 Tonnen. Aufgrund der Verdichtung des Materials beim Bau der Rampe ist das Volumen des tatsächlich benötigten Materials um 6 % höher, als das theoretisch berechnete. Ermitteln Sie die Masse des aufgeschütteten Materials auf ganze Tonnen genau. 3

25

Aufgabe IV

BE

4.0 In einem Maschinenbaubetrieb werden Antriebswellen für Lastkraftwagen gefertigt. Diese werden spanend bearbeitet und anschließend durch Wärmebehandlung gehärtet. Täglich können maximal 200 Antriebswellen produziert werden.
Die Fertigungskosten können näherungsweise durch die Funktion $k : x \mapsto k(x)$ beschrieben werden. Dabei ist:

$$k(x) = \frac{x^3}{100} - 3x^2 + 310x + 1000 \ .$$

Der Wert x gibt die Anzahl der pro Tag hergestellten Antriebswellen an, $k(x)$ gibt die Fertigungskosten in Euro in Abhängigkeit von der täglich produzierten Anzahl an Antriebswellen an. Weil täglich maximal 200 Stück Antriebswellen hergestellt werden können, und aus Gründen der Vereinfachung, werden alle betrachteten Funktionen in dieser Aufgabe auf dem Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x \le 200\}$ definiert. Es wird angenommen, dass die Anzahl der produzierten Wellen stets genau auf die Nachfrage ausgerichtet ist.
Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden.

4.1 Eine grundsätzliche Tatsache lautet: Mit steigender Anzahl gefertigter Antriebswellen steigen auch die Fertigungskosten. 3
Zeigen Sie, dass oben definierte Funktion k im Einklang mit dieser Aussage steht.

4.2 Aufgrund von Rabattierungen steigen die Einnahmen nicht direkt proportional mit der Anzahl der verkauften Wellen an. Die täglichen Verkaufseinnahmen in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Wellen pro Tag werden durch die ganzrationale Funktion zweiten Grades e beschrieben. Dabei liegt z. B. bei 100 verkauften Antriebswellen pro Tag der Verkaufspreis für eine Welle bei 120 EUR. Bei 150 verkauften Antriebswellen pro Tag ist dieser mit 110 EUR je Welle veranschlagt. Falls keine Wellen verkauft werden, hat der Betrieb selbstverständlich keine Einnahmen. 5
Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion e.
[mögliches Zwischenergebnis: $e(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 140x$]

4.3 Zeichnen Sie den Graphen G_k der Funktion k und den Graphen G_e der Funktion e für $0 \le x \le 200$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. 4
(Maßstab: x-Achse: $1\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 20$ Stück, y-Achse: $1\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 2000$ EUR)

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe IV **(Fortsetzung)** **BE**

4.4 Der Gewinn für den Betrieb ergibt sich als Differenz aus den Verkaufseinnahmen und den Fertigungskosten. Zeigen Sie, dass die Funktion g, welche den täglichen Gewinn in Abhängigkeit von der Anzahl der gefertigten Antriebswellen pro Tag beschreibt, die Gleichung $g(x) = -\frac{x^3}{100} + 2{,}8x^2 - 170x - 1000$ hat. 1

4.5 Berechnen Sie die Anzahl täglich produzierter Wellen, bei welcher das Unternehmen den größten täglichen Gewinn erzielt und berechnen Sie den maximal möglichen Gewinn an einem Tag gerundet auf ganze Euro. 5

4.6 Bei einer Produktion von 100 Wellen pro Tag sind die Verkaufseinnahmen und die Fertigungskosten gleich groß.
Bestimmen Sie das Intervall, in dem die Anzahl der täglich produzierten Wellen liegen muss, um jeden Tag einen Gewinn zu erzielen. 5

4.7 Die bisherig veranschlagten Verkaufspreise führen bei einer Produktion von 200 Wellen zu einem Verlust für das Unternehmen am Ende des Tages.
Berechnen Sie die erforderliche prozentuale Erhöhung des Verkaufspreises bei 200 hergestellten Wellen am Tag, damit der Betrieb in diesem Fall täglich kostendeckend arbeitet. 2

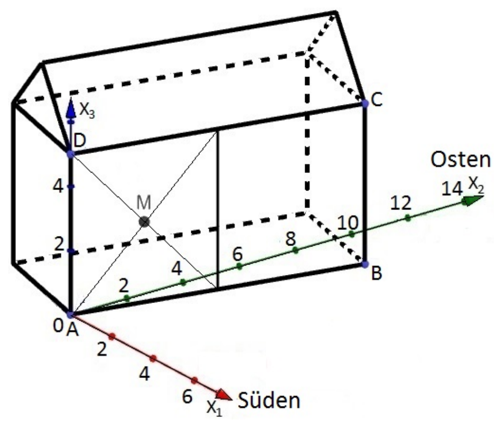
25

Aufgabe V

BE

5.0 Gegeben ist ein quaderförmiges Gebäude mit Satteldach und ebener Grundfläche. Es ist ein kartesisches Koordinatensystem festgelegt, dessen x_1-Achse exakt nach Süden und die x_2-Achse exakt nach Osten zeigt (siehe Abbildung). Die Grundfläche des Hauses liegt in der x_1-x_2-Ebene.

Das Gebäude hat keine exakte Südausrichtung. Dennoch bezeichnet man die Hauswand, welche größtenteils nach Süden zeigt, als südliche Hauswand. Diese besitzt unter anderem die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(2|9|0)$ und $D(0|0|5)$. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Berechnungen kann verzichtet werden.



5.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C. 1

5.2 Die südliche Hauswand ABCD legt die Ebene H fest. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene H in Parameter- und Koordinatenform. 4
[mögliches Zwischenergebnis: $H: 9x_1 - 2x_2 = 0$]

5.3 An die südliche Hauswand des Gebäudes soll eine Sonnenuhr an die Wand gezeichnet werden. Zuvor wird die komplette südliche Hauswand neu gestrichen. Berechnen Sie den Flächeninhalt der zu streichenden Fläche auf zwei Stellen nach dem Komma genau. 2

5.4 Der zu einer Sonnenuhr gehörende Sonnenstab, auch Polstab genannt, wird im Punkt M befestigt. In diesem Punkt schneiden sich die beiden Diagonalen der linken „Hälfte" der südlichen Hauswand (siehe Skizze). Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes M. 2
[mögliches Ergebnis: $M\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{9}{4}\middle|\frac{5}{2}\right)$]

5.5 Das Gebäude wäre exakt nach Süden ausgerichtet, wenn die südliche Hauswand des Gebäudes parallel zur x_2-x_3-Ebene wäre. Da dies nicht der Fall ist, muss bei der Montage des Sonnenstabes diese Abweichung berücksichtigt werden. Berechnen Sie den Winkel, um den die südliche Hauswand ABCD zur x_2-x_3-Ebene verdreht ist. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma. 3

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe V (Fortsetzung)

BE

5.6 Der Polstab mit der Länge 0,50 m wird im Punkt M (vgl. Teilaufgabe 5.4) an der Hauswand befestigt. Der Polstab muss dabei in eine bestimmt Richtung zeigen. Diese ist durch den Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ vorgegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze S des Polstabes. 4

Runden Sie die Koordinaten auf zwei Stellen nach dem Komma.
[mögliches Ergebnis: $S(0{,}81|2{,}25|2{,}11)$]

5.7 Bei schönem Wetter fällt Sonnenlicht (geradlinige und parallele Strahlen) auf die südliche Hauswand. Zu einem bestimmten festen Zeitpunkt lautet der „Richtungsvektor“ der Sonnenstrahlen: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix}$. 5

Dabei entsteht auf der Hauswand ein Schatten des Polstabes. Der Schatten hat die Spitze P. Berechnen Sie die Koordinaten von P. Runden Sie die Koordinaten auf zwei Stellen nach dem Komma.
[mögliches Ergebnis: $P(0{,}76|3{,}42|1{,}33)$]

5.8 In der auf dem Beiblatt dargestellten Zeichnung (siehe Beiblatt, Seite 10) wird ein neues kartesisches Koordinatensystem festgelegt: Der Ursprung liegt im Punkt M, die x_1'-Achse ist parallel zur x_1-Achse, die x_2'-Achse ist parallel zur x_2-Achse und die x_3'-Achse ist parallel zur x_3-Achse. 4

Ermitteln Sie mithilfe des Punktes P möglichst genau die Uhrzeit zum betrachteten Zeitpunkt aus Aufgabe 5.7.
Zeichnen Sie dazu den Punkt P im neuen Koordinatensystem auf dem Beiblatt (Seite 10) ein und stellen Sie Ihr Vorgehen dabei nachvollziehbar dar.

25

Aufgabe V **(Beiblatt)**

5.8

Dieses Blatt ist abzugeben