MITTLERER SCHULABSCHLUSS
AN DER MITTELSCHULE 2019

MATHEMATIK

27. Juni 2019
8:30 Uhr – 11:00 Uhr

Platzziffer (ggf. Name/Klasse): ____

Die Benutzung von für den Gebrauch an der Mittelschule zugelassenen **Formelsammlungen** bzw. **Taschenrechnern** ist während der gesamten Prüfung **erlaubt** (vgl. KMS vom 12.02.2014 Nr. IV.2 – S 7500 – 4. 4272).

Ergebnisse können nur dann bewertet werden, wenn sowohl der **Lösungsweg** als auch die **Teilergebnisse** aus dem Lösungsblatt ersichtlich sind und sich die Gesamtergebnisse daraus ableiten lassen. Auf mathematische Genauigkeit und korrekte Schreibweisen ist zu achten.

Jeder Prüfling muss **die eine** vom Prüfungsausschuss ausgewählte **Aufgabengruppe** bearbeiten.

Gesamtbewertung		Erst-korrektur	Zweit-korrektur
Aufgabengruppe I <u>oder</u> II	45 Punkte		

Note | |

Notenstufen	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Punkte	45,0 – 38,0	37,5 – 31,0	30,5 – 23,0	22,5 – 15,0	14,5 – 7,0	6,5 – 0

Erstkorrektur: ____
(Datum, Unterschrift)

Zweitkorrektur: ____
(Datum, Unterschrift)

Bemerkung: ____

Aufgabengruppe I

Punkte

1. a) Schreiben Sie die Nummern der richtigen Aussagen auf Ihr Lösungsblatt.

   (1) Der Graph jeder beliebigen quadratischen Funktion schneidet die y-Achse.

   (2) Der Graph jeder beliebigen quadratischen Funktion schneidet die x-Achse.

   (3) Der Graph jeder beliebigen quadratischen Funktion besitzt einen Scheitelpunkt.

   (4) An der Funktionsgleichung jeder quadratischen Funktion kann der Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse ohne Berechnung direkt abgelesen werden.

   b) Ermitteln Sie rechnerisch den Scheitelpunkt S_1 der nach oben geöffneten Normalparabel p_1: $y = x^2 - 7x + 10$.

   c) Berechnen Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte von p_1 mit der x-Achse und der y-Achse und geben Sie die Punkte an.

   d) Die nach oben geöffnete Normalparabel p_2 mit der Funktionsgleichung p_2: $y = x^2 + 3x$ schneidet die Parabel p_1 im Punkt T. Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten von T und geben Sie den Punkt an.

   e) Eine Parabel p_4 soll keinen gemeinsamen Punkt mit der nach unten geöffneten Normalparabel p_3 mit dem Scheitelpunkt $S_3(-2|1)$ haben. Geben Sie die Funktionsgleichung einer möglichen Parabel p_4 in Scheitelpunktform an.

   f) Zeichnen Sie die Graphen von p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm. 8

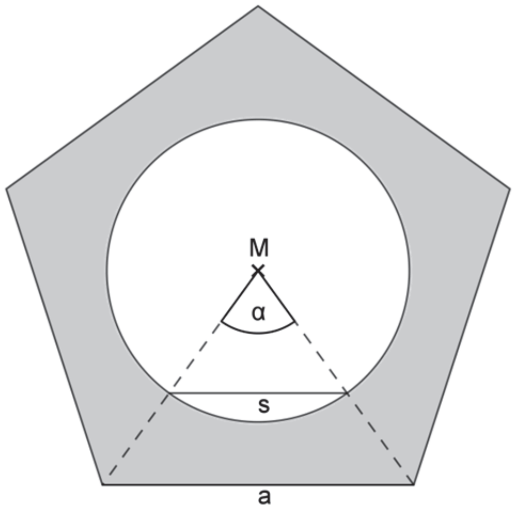
2. Geben Sie die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an und ermitteln Sie die Lösungsmenge rechnerisch.

$$\frac{x}{2x-2} - 0{,}25 = \frac{2}{4x-8}$$ 4

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

3. Die Einfassung eines Brunnens hat von oben betrachtet die Form eines regelmäßigen Fünfecks (siehe Skizze).
Berechnen Sie den Flächeninhalt der grauen Fläche ($s = 2\,m$; $a = 3\,m$; $a \parallel s$).



Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

5

4. Die Gerade g_1 mit der Steigung $m_1 = 2$ verläuft durch den Punkt $A\,(5\,|\,3)$.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g_1 rechnerisch.

b) Die Gerade g_2 verläuft durch den Ursprung und schneidet g_1 senkrecht.
Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von g_2.

c) Zeichnen Sie die beiden Geraden g_1 und g_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.

d) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels α, den die Gerade g_1 mit der x-Achse einschließt.

e) Überprüfen Sie, ob die unten stehenden Geraden jeweils parallel zu g_1 sind.
Begründen Sie in beiden Fällen Ihre Entscheidung.

g_3: $4x + 2y = 8x + 3$

g_4: $-\dfrac{y}{2} = x + 1$

f) Auf der Geraden g_5 liegen die Punkte $E\,(-2\,|\,4)$ und $F\,(2\,|\,-2)$.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g_5 rechnerisch. 8

Fortsetzung nächste Seite

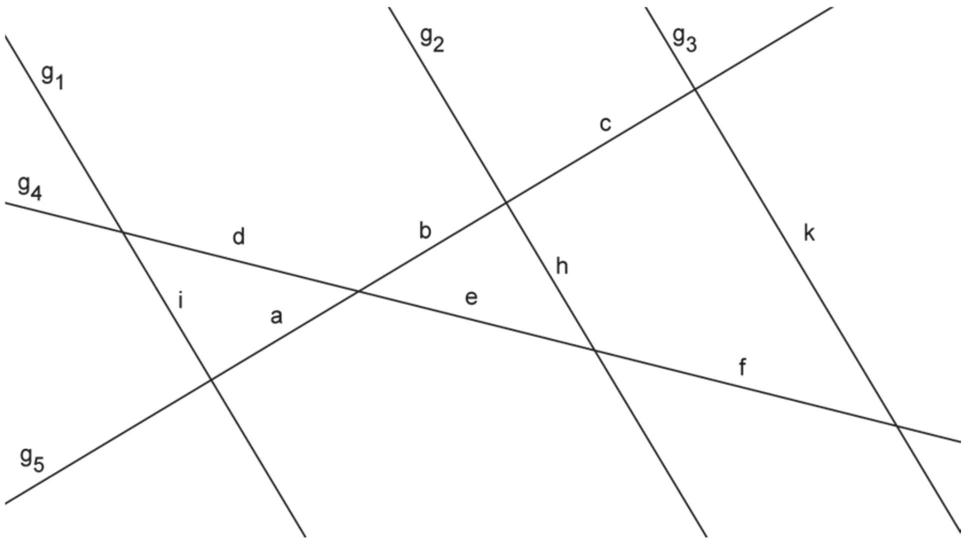
Punkte

5. Ein zylinderförmiges Gefäß mit einem Innendurchmesser von 10,0 cm ist zur Hälfte mit Wasser gefüllt.

   a) Beim vollständigen Eintauchen eines Metallstücks mit einer Masse von 1050 g in den Zylinder steigt der Wasserstand um 1,5 cm an. Berechnen Sie die Masse von 1 cm^3 dieses Metalls.

   b) Ein kugelförmiges Metallstück hat ein Volumen von 560 cm^3. Weisen Sie rechnerisch nach, dass diese Kugel nicht in den vorgegebenen Zylinder eingetaucht werden kann. 4

6. Schreiben Sie die folgenden Aussagen auf Ihr Lösungsblatt und ersetzen Sie jeweils den Platzhalter ■ so, dass die Streckenverhältnisse richtig wiedergegeben werden. Es gilt: $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$



Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

   a) $\frac{■}{a} = \frac{k}{i}$

   b) $\frac{e}{d} = \frac{■}{a}$

   c) $\frac{b+c}{k} = \frac{b}{■}$

3

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

7. Bei folgenden Aufgaben handelt es sich um Anwendungen der zentrischen Streckung:

   a) Das Volumen eines Würfels wird um das 27-fache verkleinert.
   Ermitteln Sie den Streckungsfaktor k.

   b) Der Radius eines Kreises wird um 6 cm verlängert. Dadurch vervierfacht sich der Flächeninhalt des Kreises.
   Berechnen Sie den ursprünglichen Radius r und den neuen Radius r`. 3

8. Elektroautos erfreuen sich einer immer größeren Beliebtheit.

   a) In den drei Jahren von 2003 bis 2006 stieg die Anzahl der zugelassenen Elektroautos in Deutschland durchschnittlich um 4 % pro Jahr.
   Im Jahr 2006 waren 1931 Fahrzeuge angemeldet.
   Berechnen Sie die Zahl der zugelassenen Elektroautos für das Jahr 2003.

   b) In den folgenden 12 Jahren bis zum Jahr 2018 stieg die Zahl der zugelassenen Elektroautos auf 34 022.
   Ermitteln Sie rechnerisch die durchschnittliche jährliche Zunahme in Prozent.

   c) Ab 2018 erhofft sich die Automobilindustrie eine durchschnittliche jährliche Zunahme von 31 %.
   Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren sich unter dieser Annahme die Zahl der zugelassenen Elektroautos auf 131 255 erhöht. 4

9. Lösen Sie die Gleichungen für $x \in \mathbb{Z}$.
   Stellen Sie Ihre Lösungswege nachvollziehbar dar.

   a) $(2^2)^x = \frac{1}{64}$

   b) $5^x : 5^{-2} = 5^3$

   c) $(-2) \cdot (-2)^x = (-2)^{-4}$ 3

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

10. Aus einem Korb mit 8 gekochten und 2 rohen Eiern werden nacheinander 3 Eier entnommen und nicht wieder zurückgelegt.

    a) Zeichnen Sie für diesen Ablauf ein Baumdiagramm und beschriften Sie dieses mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.

    b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Ablauf genau ein rohes Ei entnommen wird. 3

Summe: **45**

Aufgabengruppe II

Punkte

1. a) Die Punkte $A\,(1|2{,}5)$ und $B\,(3|-2{,}5)$ liegen auf der Geraden g_1.
   Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g_1 rechnerisch.

   b) Die Gerade g_2 hat die Funktionsgleichung g_2: $y = \frac{2}{4}x + 1$.

   Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts N von g_2 mit der x-Achse und geben Sie N an.

   c) Die Gerade g_3 mit der Funktionsgleichung $2y + 4 = 4x$ schneidet g_2 im Punkt T.
   Berechnen Sie die Koordinaten von T und geben Sie den Punkt an.

   d) Überprüfen Sie mithilfe einer Rechnung, ob der Punkt $C\,(1|-1)$ auf der Geraden g_3 liegt.

   e) Zeichnen Sie die Graphen der Geraden g_2 und g_3 in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm.

   f) Ermitteln Sie rechnerisch die Größe des spitzen Winkels α, den die Gerade g_2 mit der x-Achse einschließt. 8

2. Ein bayerischer Braumeister wanderte nach China aus. Im Jahr 2017 produzierte er dort 5000 Hektoliter alkoholfreies Bier. Er geht von einem durchschnittlichen jährlichen Anstieg seiner Produktion um 6 % in Bezug auf das jeweilige Vorjahr aus.

   a) Berechnen Sie die im Jahr 2022 produzierte Biermenge.

   b) Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Jahren er die Jahresmenge von 5000 Hektolitern verdoppeln kann, wenn man von einem gleichbleibenden Wachstumsfaktor ausgeht.

   c) Berechnen Sie die prozentuale durchschnittliche jährliche Steigerung, wenn er seine Jahresmenge innerhalb der nächsten 10 Jahre verdoppeln will. 4

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

3. Geben Sie die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an und ermitteln Sie die Lösungsmenge rechnerisch.

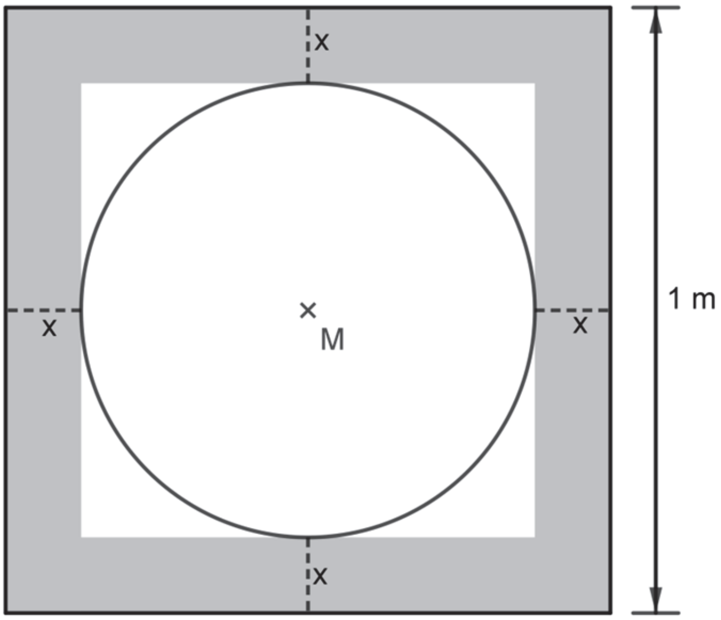
$$\frac{2(2+x)}{6-x}+2=\frac{6+x}{x}$$ 4

4. Eine Kugel soll in einem würfelförmigen Karton mit der Kantenlänge $a = 1\,\text{m}$ so verpackt werden, dass sich der Kugelmittelpunkt M exakt in der Mitte des Kartons befindet. Dazu werden die Wände des Würfels mit Styroporplatten ausgekleidet.

   Das Volumen der Kugel beträgt $\frac{1}{4}$ des Volumens des Würfels.

   Berechnen Sie die Stärke x der Styroporplatten zwischen Kugel und Wand (siehe Skizze).

   Mögliche Verformungen des Styropors sowie die Wandstärke des Kartons sollen vernachlässigt werden.



3

5. Folgende Aufgaben sind Anwendungen von Binomischen Formeln:

   a) Ersetzen Sie die Platzhalter jeweils durch den entsprechenden Term und schreiben Sie die mathematisch richtige Gleichung auf Ihr Lösungsblatt.

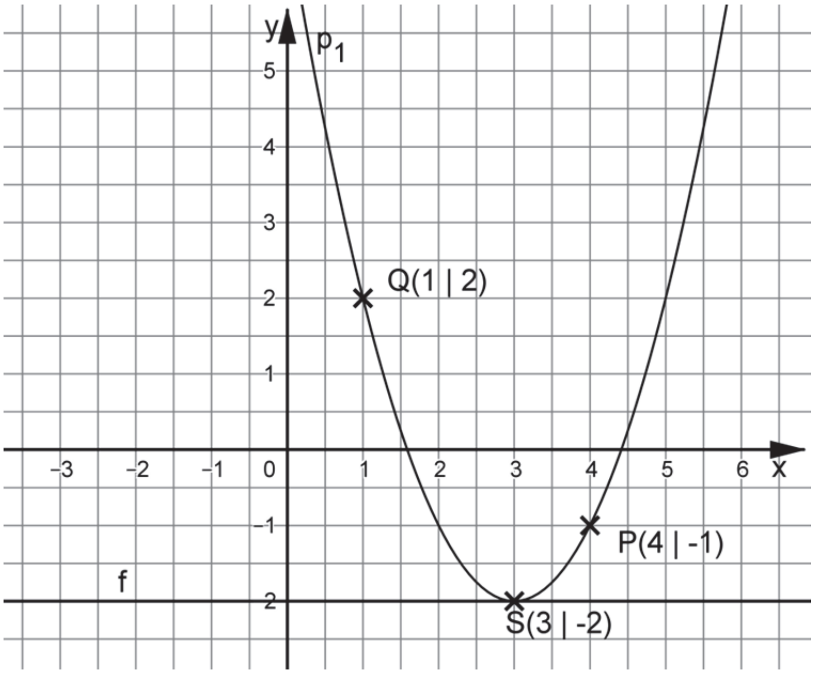
   $(\blacklozenge - 9d)^2 = 36a^2 - \blacksquare + 81d^2$

   b) Zeigen Sie nachvollziehbar, dass sich der Term $\frac{(a+b)^2 \cdot (a-b)^2}{a^2 - b^2}$ in den Term $a^2 - b^2$ umformen lässt. Es gilt: $a^2 - b^2 \neq 0$. 3

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

6. a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel p_1 in der Normalform (siehe Skizze).



b) Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinaten der Schnittpunkte N_1 und N_2 der Parabel p_2: $y = x^2 - 5x + 2{,}25$ mit der x-Achse.

c) Die Parabel p_3 mit der Funktionsgleichung $y = -x^2 + 5x - 8{,}25$ schneidet die Parabel p_2 in den Punkten R und T.
Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten dieser Schnittpunkte und geben Sie R und T an.

d) Der Punkt $W(-22{,}5 \mid y_W)$ liegt auf der Parabel p_3.
Ermitteln Sie rechnerisch die fehlende Koordinate y_W.

e) Eine nach unten geöffnete Normalparabel p_4 hat den Scheitelpunkt $S_4(-1 \mid 2)$.
Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Parabel p_4 in der Normalform.

f) Geben Sie die Funktionsgleichung der Geraden f (siehe Skizze) an. 8

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

7. Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.
   Es gilt: $a, b, c > 0$

   a) $\dfrac{3a^3 \cdot 4b^{-7} \cdot 3a^{-1} \cdot 3b^8}{9a^{-2} \cdot 15b}$

   b) $\sqrt[5]{c^3} \cdot a^{-6} \cdot \sqrt[5]{c^2} \cdot a^{12}$ 2

8. Anja Schmid schützt den Zugang zu ihrem Computer mit einem vierstelligen Passwort, das aus einer Kombination aus Buchstaben und Ziffern bestehen kann. Sie wählt für die erste Stelle einen der 26 Buchstaben des Alphabets. Dabei wird zwischen Groß- und Kleinschreibung unterschieden. An der zweiten bis vierten Stelle folgt jeweils eine Ziffer.

   a) Das richtige Passwort soll in zwei Versuchen erraten werden.
      Zeichnen Sie dazu ein Baumdiagramm für die ersten beiden zufälligen Versuche und beschriften Sie die Äste mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten. Die gleiche Kombination wird dabei kein zweites Mal eingegeben.

   b) Ermitteln Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeit, das richtige Passwort in maximal zwei Versuchen zu erraten.

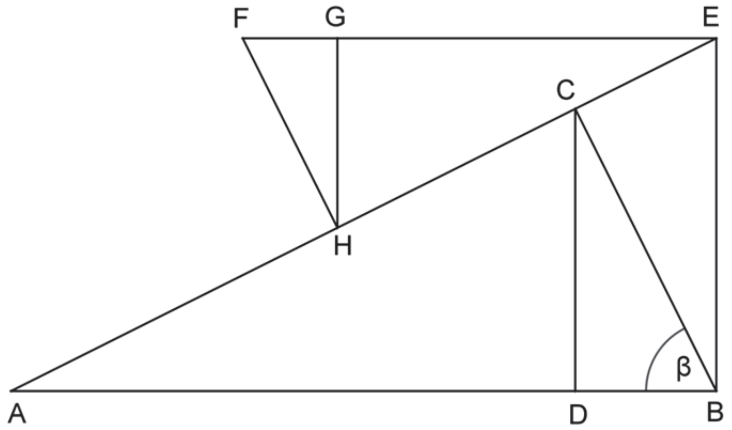
   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit einem Versuch die richtige Kombination zu erraten, wenn gleichzeitig

      - der Buchstabe ein A oder S in Großschreibung ist,
      - die erste Ziffer eine 8 ist und
      - keine Null und keine ungerade Ziffer vorkommt. 5

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

9. Eine Figur setzt sich ausschließlich aus rechtwinkligen Dreiecken zusammen, die zueinander ähnlich sind (siehe Skizze).
Es gilt: $\overline{AD} = 8\,cm$, $\overline{DC} = 4\,cm$, $\overline{FH} = 3\,cm$, $\overline{GE} = 5{,}4$ cm



Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke [DB].

b) Ermitteln Sie rechnerisch die Größe des Winkels β.

c) Berechnen Sie die Länge der Strecke [FG].

d) Formulieren Sie eine korrekte Anwendung eines Strahlensatzes, die auf die Figur zutrifft. 5

10. Ein Kopiergerät kann Bilder vergrößern und verkleinern. Dazu stellt man den entsprechenden Prozentsatz ein.
Beispielsweise werden bei der Einstellung 110 % alle Längen um den Streckungsfaktor $k = 1{,}1$ verlängert, bei 90 % dagegen um den Streckungsfaktor $k = 0{,}9$ verkürzt.

a) Ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 9$ cm wird mit der Einstellung 70 % kopiert. Berechnen Sie die Seitenlänge a` des Bildquadrates.

b) Ein Dreieck mit einem Flächeninhalt $A = 12\,cm^2$ wird auf ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von $A` = 17{,}28\,cm^2$ vergrößert.
Bestimmen Sie rechnerisch, welcher Prozentsatz eingestellt wurde.

c) Ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen $a = 6$ cm und $b = 3$ cm wird durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor $k = \frac{1}{3}$ auf das Bildrechteck A`B`C`D` abgebildet. Das Streckungszentrum ist der Punkt A.
Stellen Sie diese zentrische Streckung zeichnerisch dar. 3

Summe: **45**