

**Fachabiturprüfung 2020**  
zum Erwerb der Fachhochschulreife  
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Donnerstag, 28. Mai 2020, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

# **Mathematik**

## **CAS**

### **Ausbildungsrichtung Technik**

## **Teil 2: mit Hilfsmitteln**

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Lineare Algebra und analytische Geometrie* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 5 **1** Der Graph  $G_g$  einer auf  $D_g = \mathbb{R}$  definierten ganzrationalen Funktion  $g$  dritten Grades berührt die  $x$ -Achse an der Stelle  $x=4$  und hat im Punkt  $P(0|-4)$  einen relativen Extrempunkt. Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktion  $g$ .
- 2.0** Gegeben ist die reelle Funktion  $f_k: x \mapsto \frac{1}{10}(x^2 - 9)(x^2 + 3x - 2kx - 6k)$  mit  $k \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}$ . Der zugehörige Graph wird mit  $G_{f_k}$  bezeichnet.
- 7 **2.1** Bestimmen Sie die Nullstellen von  $f_k$  mit deren Vielfachheiten in Abhängigkeit vom Wert des Parameters  $k$ .
- 2.2.0** Für alle weiteren Teilaufgaben sei  $k=0,5$ . Ohne Nachweis kann verwendet werden:
- $$f_{0,5}: x \mapsto \frac{1}{10}(x^2 - 9)(x^2 + 2x - 3)$$
- 5 **2.2.1** Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten sämtlicher relativen Extrempunkte des Graphen  $G_{f_{0,5}}$ . Runden Sie die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen.
- 4 **2.2.2** Zeichnen Sie den Graphen  $G_{f_{0,5}}$  im Bereich  $-4 \leq x \leq 3,5$  mithilfe bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem ein (1 LE = 1 cm).
- 4 **2.2.3** Weisen Sie nach, dass es genau eine Tangente  $G_t$  an den Graphen  $G_{f_{0,5}}$  gibt, die durch den nicht auf  $G_{f_{0,5}}$  liegenden Punkt  $P(0|5,9)$  verläuft.  
Hinweis: Verwenden Sie, dass für die Funktionsgleichung von  $t$  gilt:  
 $t(x) = m \cdot (x - x_p) + y_p$  mit geeigneter Steigung  $m$
- 3 **2.2.4** Gegeben ist die Funktion  $w: x \mapsto 2,2x + 5,9$  mit  $D_w = \mathbb{R}$ . Ihr Graph ist die Wendetangente des Graphen  $G_{f_{0,5}}$  an der Wendestelle  $x_w = -2$  (Nachweis nicht erforderlich).  
Im II. Quadranten des Koordinatensystems schließen diese Wendetangente, die  $y$ -Achse und der Graph  $G_{f_{0,5}}$  für  $x \geq -2$  ein Flächenstück ein.  
Zeichnen Sie den Graphen von  $w$  in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 2.2.2 ein, kennzeichnen Sie darin das beschriebene Flächenstück und berechnen Sie die exakte Maßzahl seines Flächeninhaltes.

Fortsetzung siehe nächste Seite

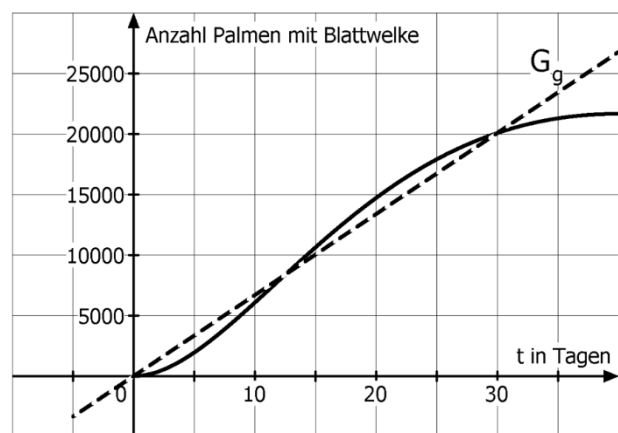
BE

**3.0** Auf einer Plantage mit Ölpalmen ist ein Pilzbefall ausgebrochen, welcher zur Blattwelke der befallenen Ölpalmen führt. Durch Spritzen eines Gegenmittels können Ölpalmen von der Blattwelke geheilt werden.

Die Anzahl der Ölpalmen mit Blattwelke soll in den ersten 180 Tagen ab dem ersten Auftreten der Blattwelke modellhaft durch eine Funktion  $p$  beschrieben werden.

Der jeweilige Funktionswert von  $p$  soll die Anzahl der Ölpalmen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  auf dieser Plantage von Blattwelke befallen sind, angeben. Dabei gibt  $t$  die Zeit in Tagen seit dem Beobachtungsbeginn  $t_0 = 0$ , an dem erstmalig eine Ölpalme mit Blattwelke auf der Plantage gesichtet wurde, an.

- 3.1** Die nebenstehende Abbildung zeigt den Verlauf an Ölpalmen mit Blattwelke auf der Plantage innerhalb der ersten 40 Tage seit Beobachtungsbeginn (durchgezogene Linie) sowie einen Ausschnitt einer Geraden  $G_g$  (gestrichelte Linie).



Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise die Steigung der Geraden  $G_g$  und interpretieren Sie diese Steigung im Sachzusammenhang.

- 3.2** Die Anzahl der Ölpalmen mit Blattwelke soll bestmöglich mit der gewählten Modellfunktion  $p: t \mapsto 100 \cdot t^2 \cdot e^{at} + 1$  mit reellem  $t \in [0; 180]$  und  $a \in \mathbb{R}$  beschrieben werden. Damit das gelingt, muss der Parameter  $a$  in der Funktionsgleichung passend bestimmt werden. Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung aus 3.1 näherungsweise den Wert für  $a$  auf zwei Nachkommastellen gerundet.

**3.3.0** Im Folgenden wird die Funktion  $p$  mit der Gleichung  $p(t) = 100 \cdot t^2 \cdot e^{-0,05t} + 1$  mit  $t \in [0; 180]$  betrachtet. Runden Sie die weiteren Ergebnisse auf ganze Zahlen.

- 3.3.1** Berechnen Sie die maximale Anzahl der gleichzeitig mit Blattwelke befallenen Ölpalmen.
- 3.3.2** Berechnen Sie ohne Verwendung der dritten Ableitung von  $p$ , am wievielten Tag nach Beobachtungsbeginn der Zeitpunkt ist, an dem die Abnahmerate der mit Blattwelke befallenen Ölpalmen zum ersten Mal betragsmäßig am größten ist.

43

BE

- 1.0** Der Graph der reellen Funktion  $h: x \mapsto \frac{1}{8} \cdot (-x^3 + 3x^2 + 9x + 5)$  mit der Definitionsmenge  $D_h = \left[-\frac{7}{2}; 5\right] \subset \mathbb{R}$  beschreibt modellhaft das Höhenprofil eines bestimmten Geländequerschnitts in einem Koordinatensystem nach Wahl eines geeigneten Maßstabs. Durch die Funktionswerte von  $h$  wird die Höhe gegenüber dem Meeresspiegel an jeder Stelle des Geländequerschnitts in Abhängigkeit von der Ortskoordinate  $x$  angegeben. Die Funktionswerte von  $h$  und  $x$  sind dabei Längenangaben als Vielfache von 100 Meter.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden.

- 6 1.1** Bestimmen Sie rechnerisch die maximale Höhe gegenüber dem Meeresspiegel auf ganze Meter gerundet für den betrachteten Geländequerschnitt.
- 2 1.2** Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion  $h$  mit deren Vielfachheiten.
- 3 1.3** Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von  $h$  auf der maximalen Definitionsmenge von  $h$  in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 1 cm).
- 6 1.4** Trotz Bürgerproteste soll das Tal in der Umgebung von  $x_1 = -1$  für einen Stausee geflutet und deswegen eine Staumauer errichtet werden. Die obere Begrenzungslinie des Querschnitts der Staumauer soll parallel zur  $x$ -Achse verlaufen und sich in einer Höhe von 200 Metern gegenüber dem Meeresspiegel befinden. Markieren Sie in Ihrer Zeichnung von Teilaufgabe 1.3 die Staumauer und berechnen Sie deren Flächeninhalt in der Einheit  $m^2$  exakt.
- 2.0** Gegeben sind die reellen Funktionen  $f_a: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 + 4a \cdot x^2 + 1$  und  $g_a: x \mapsto 1 - 4a \cdot x$  mit den Definitionsmengen  $D_{f_a} = D_{g_a} = \mathbb{R}$  und dem Parameter  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- 7 2.1** Geben Sie die Differenzfunktion  $d_a: x \mapsto f_a(x) - g_a(x)$  mit  $D_{d_a} = \mathbb{R}$  in faktorisierte Schreibweise an und bestimmen Sie sämtliche Werte für  $a$ , für welche die Differenzfunktion  $d_a$  eine doppelte Nullstelle  $x_0$  besitzt. Geben Sie anschließend die Bedeutung dieser doppelten Nullstelle  $x_0$  für die gegenseitigen Lage der Graphen von  $f_a$  und  $g_a$  an.
- 4 2.2** Ermitteln Sie Art und Lage sämtlicher relativen Extrempunkte des Graphen  $G_{f_a}$  in Abhängigkeit von  $a$ .

*Fortsetzung siehe nächste Seite*

BE

**3.0** Um für ihr neues Musik-Album zu werben, sendete eine angesagte bayerische Band auf einer Internet-Plattform am 1. Mai 2020 einen 12-minütigen Live-Stream. Die problemlose Übertragung begann exakt um 20:45:00 Uhr. Der Betreiber der Internet-Plattform registrierte den Verlauf der Zuschauerzahlen.

Die Funktionswerte von  $z$  mit  $z(t) = 3 + (0,2t^2 - 4t + 20) \cdot e^{0,3t-3}$  und reellem  $t \in [0; 12]$  geben in guter Näherung die Anzahl der Zuschauer in 100000 in Abhängigkeit von der verstrichenen Sendezeit  $t$  in Minuten des Live-Streams an.

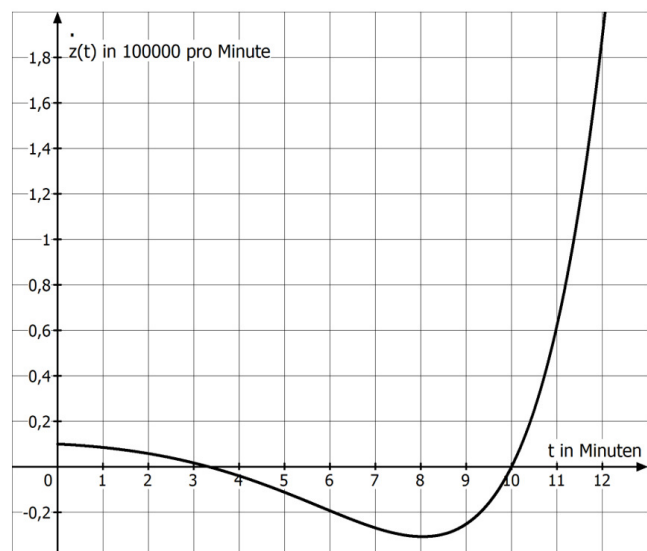
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden. Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden.

**3.1** Berechnen Sie die Anzahl der Zuschauer, die demnach den Live-Stream um 20:52:00 Uhr sahen.

**3.2** Ermitteln Sie die maximalen Zeitintervalle, in denen die Zuschauerzahl des Live-Streams zunahm bzw. abnahm. Zeigen Sie anschließend, dass die absolut größte Zuschauerzahl am Ende des Live-Streams registriert wurde.

**3.3.0** Die nebenstehende Abbildung zeigt

den Graphen  $G_{\dot{z}}$  von  $\dot{z}$ .



**3.3.1** Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung aus 3.3.0 den Zeitpunkt, an dem die Abnahmerate der Zuschauerzahl betragsmäßig am größten war, und bestimmen Sie, wie groß diese momentane Abnahmerate war.

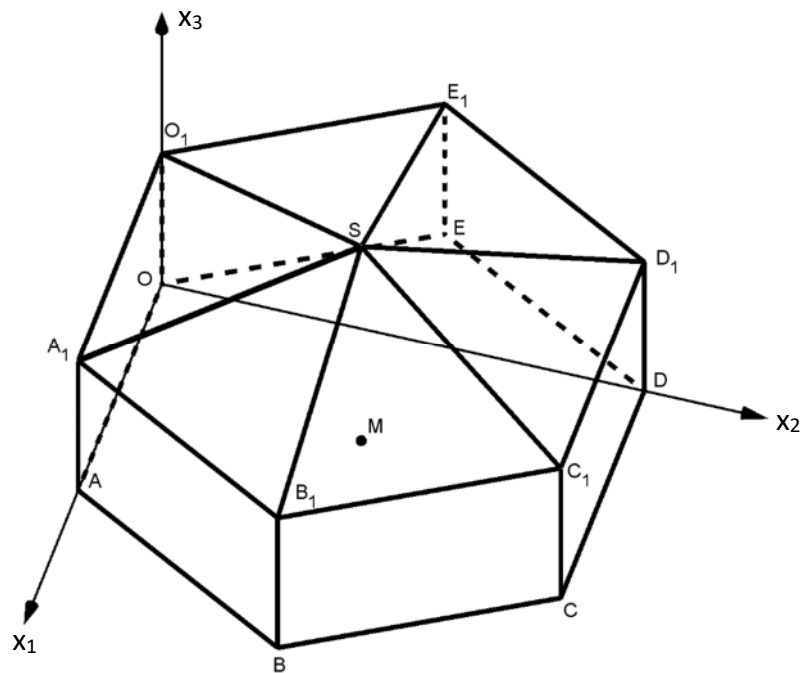
**3.3.2** Schätzen Sie mithilfe der Abbildung aus 3.3.0 die Flächenmaßzahl des Flächenstücks ab, welches der Graph  $G_{\dot{z}}$  zusammen mit der  $t$ -Achse im IV. Quadranten einschließt.

Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

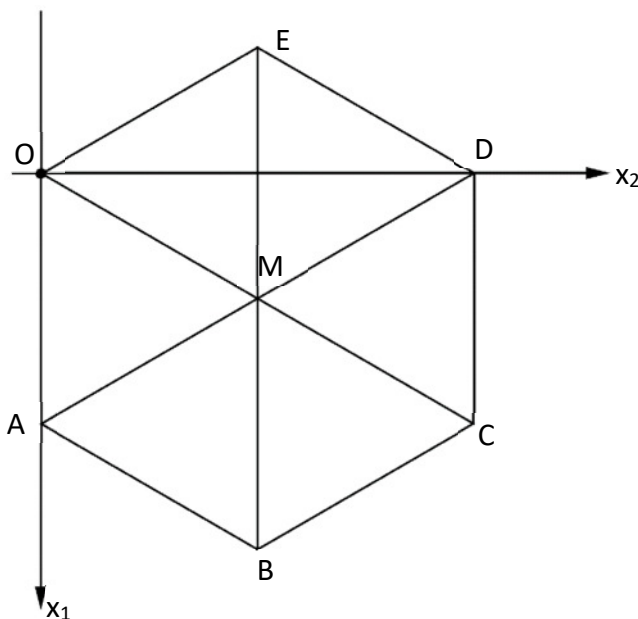
43

BE

- 1.0** Das Zelt eines Jugendzirkus weist die Form eines regelmäßigen Prismas mit aufgesetzter Pyramide auf und wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  betrachtet. Die Grundfläche des Zeltes liegt in der  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatenebene und ist ein regelmäßiges Sechseck  $OABCDE$  mit dem Mittelpunkt  $M(3|3\sqrt{3}|0)$ . Die Seiten des Sechsecks sind jeweils 6 m lang. Der Punkt  $O$  liegt im Koordinatenursprung,  $A$  hat die Koordinaten  $(6|0|0)$  und  $A_1$  die Koordinaten  $(6|0|4)$ . Das Dach des Zeltes wird durch eine regelmäßige sechseckige Pyramide gebildet. Die Spitze  $S$  des Zeltes liegt senkrecht über  $M$  in einer Höhe von 6 m. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden.



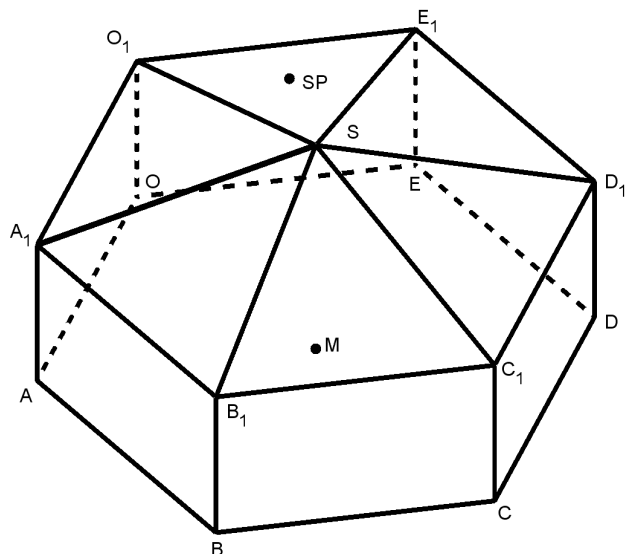
Zusätzlich zeigt die folgende Zeichnung den Grundriss des Zeltes in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene.



Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

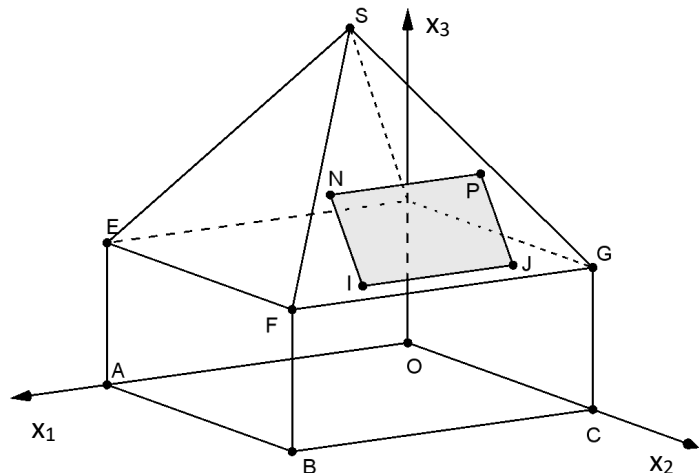
- 3 **1.1** Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte B, C und  $C_1$ .
- 4 **1.2** Für das Zelt und die Zirkuswagen wird eine Stellfläche benötigt, die 2,5-mal so groß ist wie die Grundfläche des Zirkuszeltes. Ein Landwirt stellt dem Zirkus eine Wiese mit einer Fläche von  $240 \text{ m}^2$  zur Verfügung.  
Prüfen Sie, ob diese Fläche groß genug ist.  
[ Teilergebnis:  $A_{\text{Zelt}} \approx 93,5 \text{ m}^2$  ]
- 1 **1.3** Entscheiden Sie mit Hilfe einer Rechnung, ob ein Heizgebläse, das für Rauminhalte bis maximal  $350 \text{ m}^3$  ausgelegt ist, geeignet ist, um das Zirkuszelt ausreichend zu beheizen.
- 3 **1.4** Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, welche durch die Punkte  $O_1(0|0|4)$ ,  $E_1(-3|3\sqrt{3}|4)$  und  $S(3|3\sqrt{3}|6)$  festgelegt wird.  
[ Mögliches Ergebnis:  $F: x_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 3x_3 = -12$  ]
- 3 **1.5** Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene F aus Teilaufgabe 1.3 gegenüber der Grundfläche des Zeltes.
- 4 **1.6** Vom Schwerpunkt SP des Dreiecks  $O_1SE_1$  soll senkrecht zur Ebene F ein Drahtseil bis zum Boden gespannt werden. Berechnen Sie die Länge dieses Seils.
- 5 **1.7** Zur Abendvorstellung soll ein Lichtstrahl auf die Seitenfläche  $OAA_1O_1$ , in der sich auch der Eingang befindet, treffen. Dazu wird auf einem Mast ein Spotlight installiert, dessen Lichtstrahl durch  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$  mit  $s \in \mathbb{R}^+$  beschrieben wird. Prüfen Sie, ob der Lichtstrahl des Spotlights die Seitenfläche  $OAA_1O_1$  trifft. Geben Sie gegebenenfalls an, wie die Position des Spotlights am Mast verändert werden muss, damit die gewünschte Beleuchtung erzielt wird, wenn der Lichtstrahl nach wie vor parallel zu h verlaufen soll.



23

BE

Ein Haus hat die Form eines Quaders mit oben aufgesetzter Pyramide. Das Haus wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  betrachtet. Der Punkt O liegt im Koordinatenursprung und die Punkte A und C liegen auf den Koordinatenachsen. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der durch die Punkte O, A, B und C festgelegten quadratischen Grundfläche des



Hauses. Die südliche Dachfläche wird durch die Punkte  $F(12|12|5)$ ,  $G(0|12|5)$  und  $S(6|6|13)$  begrenzt. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

- 4 **1** Der Bauherr geht davon aus, dass bei einer Dachflächenneigung von mindestens  $50^\circ$  gegenüber der Grundfläche Schnee problemlos von der Dachfläche abrutschen kann. Untersuchen Sie, ob die Dachneigung des Hauses hierfür ausreicht.

- 2.0** Auf der südlichen Dachfläche ist ein Sonnenkollektor angebracht, der durch das Rechteck IJPN dargestellt wird. Die Kante  $\overline{IJ}$  verläuft parallel zur Kante  $\overline{FG}$ .

Ferner gilt:  $I(9|11,7|5,4)$ ,  $J(3|11,7|5,4)$  und  $|\overline{IN}| = |\overline{JP}| = 3,5 \text{ m}$ .

- 6 **2.1** Der Punkt  $M_{\overline{FG}}$  ist der Mittelpunkt der Kante  $\overline{FG}$ . Erläutern Sie, dass der Vektor  $\overline{ON}$  mit Hilfe

der Gleichung  $\overline{ON} = \overline{OI} + \frac{|\overline{IN}|}{|\overline{M_{FG}S}|} \cdot \overline{M_{FG}S}$  berechnet werden kann und bestimmen Sie die

Koordinaten von N.

[ Ergebnis:  $N(9|9,6|8,2)$  ]

- 5 **2.2** Berechnen Sie den prozentualen Anteil der südlichen Dachfläche, die vom Sonnenkollektor bedeckt ist.

- 8 **2.3** Die Position einer Satellitenanlage auf dem Dach eines Nachbarhauses lässt sich stark vereinfacht durch den Punkt  $Z(15|27|17)$  beschreiben. Die Einstrahlrichtung der Sonne wird zum Zeitpunkt des vermuteten Leistungsmaximums des Sonnenkollektors durch den Vektor

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$  beschrieben. Die Ebene  $E_{SK}$  wird durch die südliche Dachfläche des Hauses

festgelegt. Bestimmen Sie den Abstand der Ebene  $E_{SK}$  von der Satellitenanlage auf ganze Meter gerundet und untersuchen Sie, ob der Schattenwurf der Satellitenanlage zum Zeitpunkt des vermuteten Leistungsmaximums innerhalb der Sonnenkollektorfläche liegt.

23