Abiturprüfung 2020

zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Donnerstag, 28. Mai 2020, 09:00 Uhr – 10:00 Uhr

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

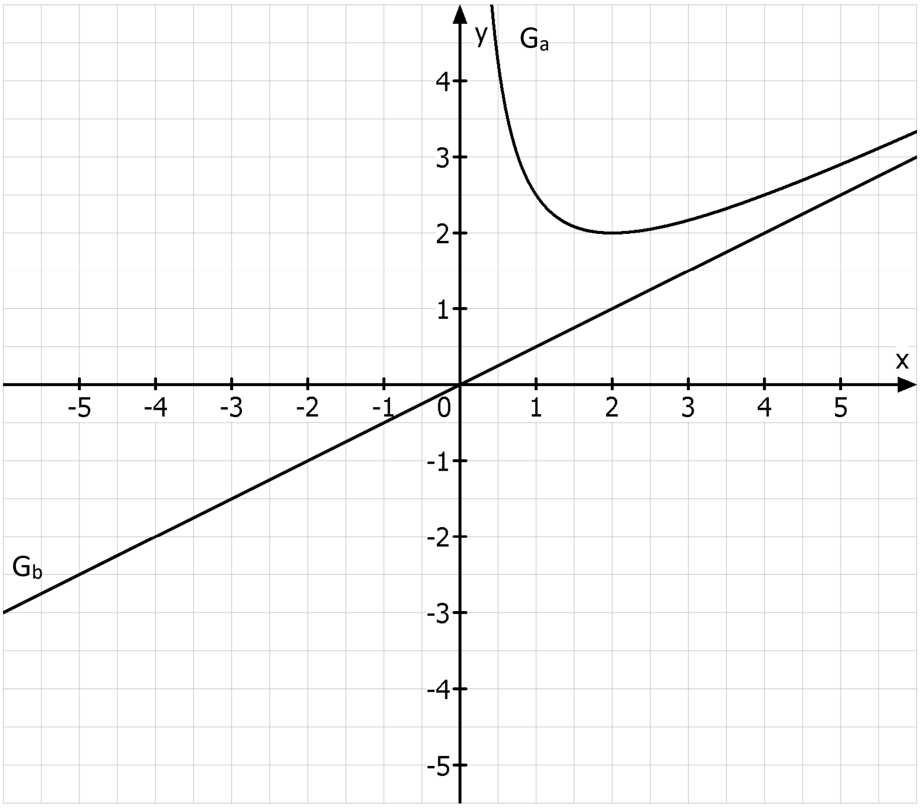
Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben sind die Funktionen $a: x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$ mit $D_a = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b: x \mapsto \frac{1}{2}x$ mit $D_b = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion a heißt G_a und der Graph der Funktion b heißt G_b.
In der Abbildung ist ein Teil des Graphen G_a für x > 0 und der Graph G_b dargestellt.
G_b ist die schräge Asymptote von G_a.



2 **1.1** Zeigen Sie, dass der vollständige Graph G_a punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

3 **1.2** Geben Sie die Art und die ganzzahligen Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_a an und zeichnen Sie G_a für x < 0 in das Koordinatensystem von 1.0 ein.

3 **1.3** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_a im Punkt $P(1|a(1))$.

4 **2** Von einer gebrochen-rationalen Funktion c mit der Definitionsmenge $D_c = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ und ihrem Graphen G_c sind die folgenden Eigenschaften bekannt:

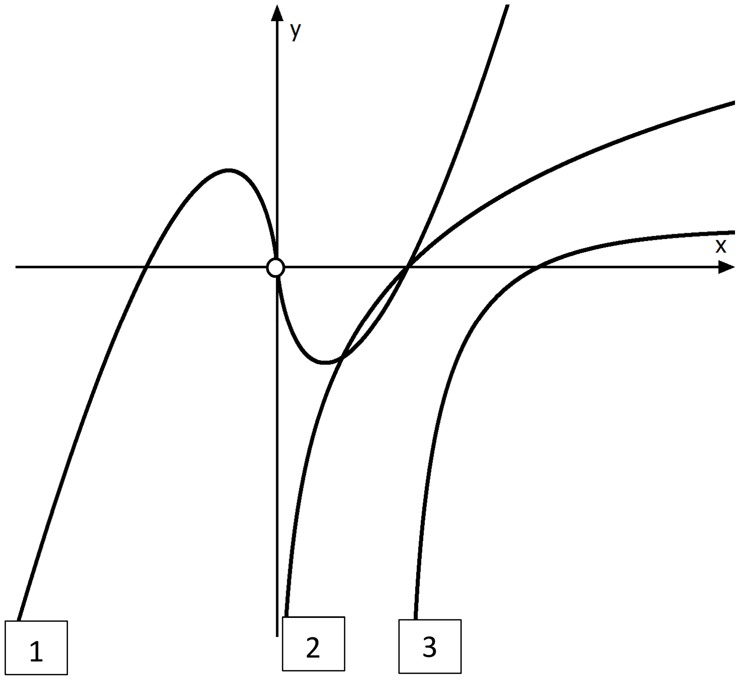
- Die Funktion c hat eine Unendlichkeitsstelle mit Vorzeichenwechsel bei x = 1.
- Die Funktion c hat eine stetig behebbare Definitionslücke bei x = –1.
- Die Funktion c hat die einzige Nullstelle x = 2 mit der Vielfachheit zwei.
- Es gilt: $P(-3|5) \in G_c$

Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion c so, dass die genannten Eigenschaften erfüllt sind.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3.0 Gegeben sind in ihren maximalen Definitionsmengen die reellen Funktionen
$f: x \mapsto \ln(x)$,
$g: x \mapsto x \cdot \ln(x^2)$
und
$h: x \mapsto \frac{1}{x} \cdot \ln(x-1)$.
Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f, g und h.



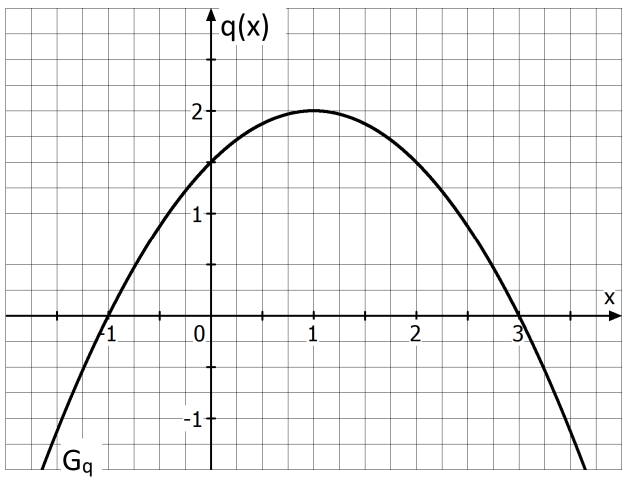
4 **3.1** Ordnen Sie jeder Funktion den richtigen Graphen zu und geben Sie zu allen drei Funktionen jeweils die Definitionsmenge an.

3 **3.2** Graph 1 und Graph 2 schließen im IV. Quadranten eine endliche Fläche ein. Beschreiben Sie <u>ohne</u> die Rechnungen durchzuführen, wie Sie die Maßzahl dieser Fläche ermitteln können.

3 **4** Die Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Funktion q mit dem Scheitel $S(1|2)$.

Für die Funktion r gilt: $r(x) = e^{q(x)}$.
Für beide Funktionen gilt:
$D_q = D_r = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Wertemenge der Funktion r. Begründen Sie dabei Ihre Vorgehensweise.



22

BE

1.0 Für die Vektoren $\vec{a}_k$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit $k \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2 **1.1** Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des von den Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Dreiecks.

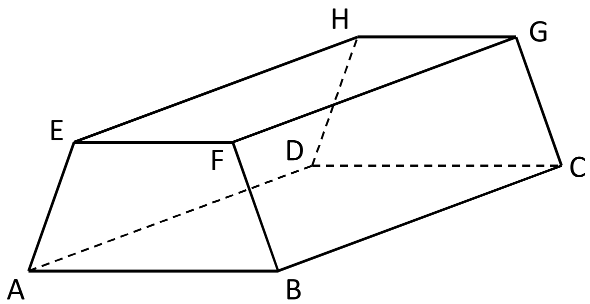
2 **1.2** Ermitteln Sie, für welchen Wert für k die Vektoren $\vec{a}_k$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

2.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebene $E: x_1 + 3x_3 = 0$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

2 **2.1** Geben Sie jeweils die besondere Lage von g und E im Koordinatensystem an.

2 **2.2** Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes D, der von der Ebene E den Abstand $d = \sqrt{10}$ LE besitzt.

3.0 Die Abbildung zeigt ein Prisma, bei dem die beiden parallelen und deckungsgleichen Trapeze $ABFE$ und $DCGH$ senkrecht auf der Grundfläche $ABCD$ stehen.



2 **3.1** Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:

„Das Volumen des Prismas berechnet sich mittels der Formel $V = \left| \overrightarrow{AD} \circ (\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AB}) \right|$."

2 **3.2** Begründen Sie anhand des beschriebenen Prismas, wie viele Lösungen die Gleichung $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda_3 \cdot \overrightarrow{HG} = \vec{0}$ mit den Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ besitzt.

12

Abiturprüfung 2020

zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Donnerstag, 28. Mai 2020, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

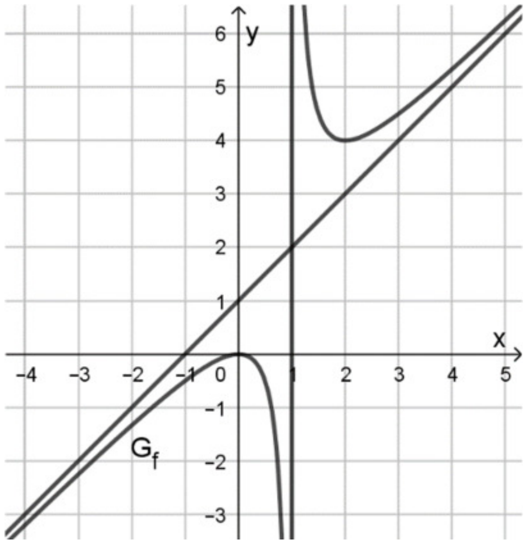
Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Lineare Algebra und analytische Geometrie* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2}{x-1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Der Graph der Funktion f heißt G_f.
Nebenstehende Abbildung zeigt einen Teil von G_f mit seinen beiden Asymptoten.



4 **1.1** Bestätigen Sie die schiefe Asymptote von G_f und die Nullstelle von f durch Rechnung.

3 **1.2** Geben Sie mithilfe der Abbildung die maximalen Monotonieintervalle sowie die Wertemenge der Funktion f an. Entnehmen Sie hierzu der Abbildung ganzzahlige Werte.

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x)) = \ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_g =]1; +\infty[$. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet. Für die folgenden Teilaufgaben dürfen die Ergebnisse der Aufgabe 1 verwendet werden.

2 **2.1** Entscheiden Sie, ob die Funktion g Nullstellen besitzt und begründen Sie Ihre Entscheidung.

3 **2.2** Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von g an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichung der Asymptote von G_g an.

4 **2.3** Bestimmen Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_g.

4 **2.4** Zeichnen Sie den Graphen G_g und seine Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $1 < x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

3 **2.5** Gegeben ist die Stammfunktion $G: x \mapsto -x + 2x \cdot \ln(x) - (x-1) \cdot \ln(x-1)$ mit $D_G =]1; +\infty[$ der Funktion g (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das von G_g, der x-Achse sowie den beiden Geraden mit den Gleichungen x = 2 und x = 3 eingeschlossen wird. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen und kennzeichnen Sie das Flächenstück im Koordinatensystem der Teilaufgabe 2.4.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3.0 Um die Wirksamkeit eines Medikaments zu untersuchen, wird nach dessen Einnahme die Konzentration im Blut der Patienten gemessen. Diese kann näherungsweise durch die Funktion $k: t \mapsto 0{,}75t \cdot e^{-0{,}25t+2}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden. Dabei gibt der Funktionswert von k die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten in Milligramm pro Liter $\left[\frac{\text{mg}}{\ell}\right]$ und die Variable t die Zeit in Stunden [h] nach der Einnahme des Medikaments an. Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse sinnvoll.

5 **3.1** Ermitteln Sie, nach wie vielen Stunden nach der Einnahme gemäß der gewählten Modellfunktion die maximale Konzentration des Medikamentes im Blut erreicht ist und berechnen Sie diese maximale Konzentration.

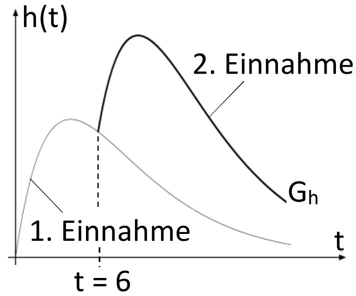
6 **3.2** Berechnen Sie mithilfe partieller Integration den Wert des bestimmten Integrals $\frac{1}{20}\int_0^{20} k(t)dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

4 **3.3** Zeichnen Sie den Graphen der Funktion k in ein kartesisches Koordinatensystem im Intervall $0 \leq t \leq 25$. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 0,5cm. Übersteigt die Konzentration des verabreichten Medikaments im Blut des Patienten $6\frac{\text{mg}}{\ell}$ können Nebenwirkungen auftreten. Ermitteln Sie näherungsweise mit Hilfe des Graphen von k, in welchem Zeitraum nach der Einnahme damit zu rechnen ist.

3.4.0 Um die Nebenwirkungen zu vermindern, plant der Hersteller das Medikament geringer zu dosieren. Es soll vier Stunden nach der Einnahme als Höchstwert eine Konzentration von $5\frac{\text{mg}}{\ell}$ im Blut auftreten. Die Konzentration im Blut lässt sich dann mit einer Funktionsgleichung der Art $g(t) = c \cdot t \cdot e^{-0{,}25t+2}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$; $c \in \mathbb{R}$ modellhaft darstellen. Dabei gibt der Funktionswert von g die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten in Milligramm pro Liter $\left[\frac{\text{mg}}{\ell}\right]$ und die Variable t die Zeit in Stunden [h] nach der Einnahme an.

2 **3.4.1** Bestimmen Sie den Wert des Parameters c.

3 **3.4.2** Einem Patienten wird verordnet, sechs Stunden nach der Ersteinnahme das Medikament nochmals einzunehmen. Die Konzentration im Blut entspricht dann modellhaft den Funktionswerten der Funktion h mit $h(t) = 0{,}46t \cdot e^{-0{,}25t+2} + 0{,}46(t-6) \cdot e^{-0{,}25(t-6)+2}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 6$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_h der Funktion h. Untersuchen Sie, ob der Patient bei dieser Verordnung mit Nebenwirkungen (siehe Teilaufgabe 3.3) zu rechnen hat.



43

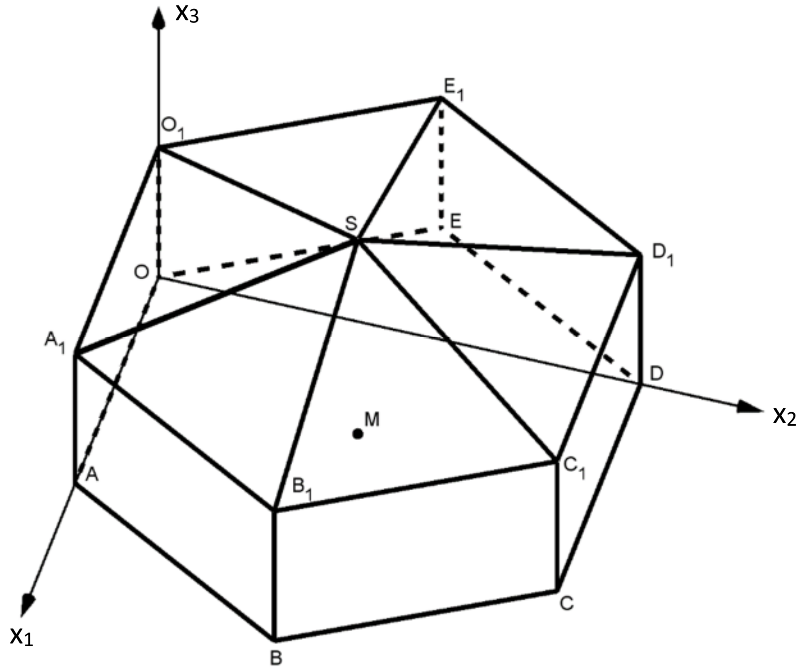
BE		
	1.0	Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto h(x) = \frac{3x^2 - 2x}{-2x^3 + 4x}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_h \subset IR$. Der Graph der Funktion h heißt G_h.
6	**1.1**	Bestimmen Sie D_h, die Nullstellen von h und geben Sie die Art der Definitionslücken von h an.
3	**1.2**	Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_h an.
	1.3.0	Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x) = \frac{3x - 2}{-2x^2 + 4}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset IR$. Der Graph der Funktion f heißt G_f.
2	**1.3.1**	Geben Sie die maximale Definitionsmenge von f an und zeigen Sie, dass $h(x) = f(x)$ für alle $x \in D_h \cap D_f$ gilt.
6	**1.3.2**	Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen G_f. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{6x^2 - 8x + 12}{(2x^2 - 4)^2}$]
4	**1.3.3**	Zeichnen Sie die Asymptoten von G_f in ein kartesisches Koordinatensystem und fertigen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte eine Skizze des Graphen G_f an.
5	**1.3.4**	Erstellen Sie eine Wertetabelle der ersten Ableitungsfunktion f' für $-0,5 \leq x \leq 1,25$ mit der Schrittweite $\Delta x = 0,25$ auf zwei Nachkommastellen gerundet. Begründen Sie mithilfe der Wertetabelle, dass G_f einen Wendepunkt besitzen muss. Entscheiden Sie, in welchem Quadranten dieser Wendepunkt liegt und begründen Sie diese Entscheidung.

Fortsetzung siehe nächste Seite

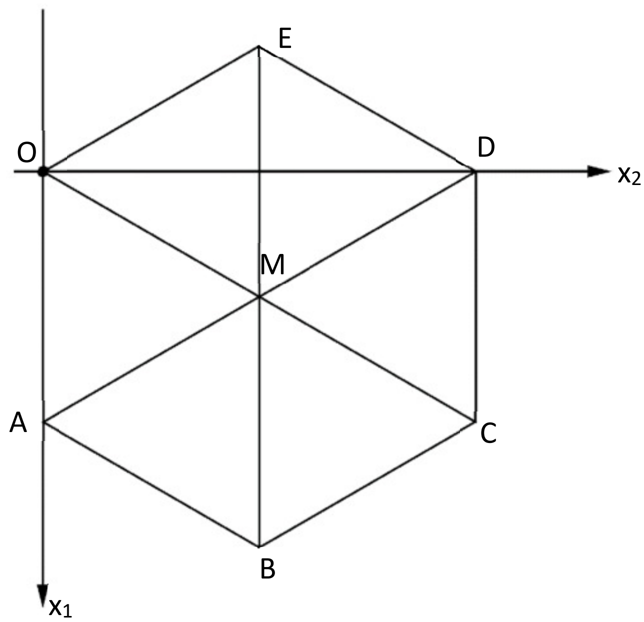
BE		
	2.0	Forschungsergebnisse betonen die Bedeutung des Wachstums des menschlichen Gehirns für die Entwicklung kognitiver Fähigkeiten. Das durchschnittliche Gehirnvolumen des Menschen nach der Geburt bis zum Ende des sechsten Lebensjahres kann näherungsweise durch die Funktion $V: t \mapsto \frac{1263}{1+2{,}5 \cdot e^{-a \cdot t}}$ mit $t \in [0; 6]$ sowie $a \in IR^+$ modelliert werden. Dabei entspricht V(t) dem Gehirnvolumen in Millilitern (ml) zum Zeitpunkt t in Jahren nach der Geburt. In den Rechnungen kann auf die Mitführung von Einheiten verzichtet werden, in den Antworten sind diese zu berücksichtigen.
3	**2.1**	Am fünften Geburtstag (t = 5) beträgt das durchschnittliche Gehirnvolumen des Menschen etwa 1260 ml. Berechnen Sie hiermit den Wert der Konstanten a. Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle. [Ergebnis: $a \approx 1{,}4$]
2	**2.2**	In einer Untersuchung kurz nach der Geburt wird bei einem ausgewählten Kind ein Gehirnvolumen von 390 ml festgestellt. Berechnen Sie das durchschnittliche Volumen des Gehirns bei der Geburt laut dem Modell sowie die prozentuale Abweichung des bei der Untersuchung gemessenen Wertes vom Volumenwert des Modells.
5	**2.3**	Zeigen Sie, dass für die Volumenwachstumsgeschwindigkeit nach dem Modell gilt: $\dot{V}(t) = \frac{4420{,}5 \cdot e^{-1{,}4t}}{(1+2{,}5 \cdot e^{-1{,}4t})^2}$ Begründen Sie mathematisch, dass das Gehirnvolumen echt monoton zunimmt, und berechnen Sie das durchschnittliche Gehirnvolumen nach dem Modell am Ende des 6. Lebensjahres.
4	**2.4**	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion V für $0 \le t \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
3	**2.5**	Das menschliche Gehirn ist in der Regel im Alter von 10 Jahren ausgewachsen und besitzt dann ein durchschnittliches Volumen von 1400 ml. Untersuchen Sie, ob die gewählte Modellfunktion das Gehirnvolumen im Alter von 10 Jahren noch richtig beschreibt.
43		

BE

1.0 Das Zelt eines Jugendzirkus weist die Form eines regelmäßigen Prismas mit aufgesetzter Pyramide auf und wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Die Grundfläche des Zeltes liegt in der x_1-x_2-Koordinatenebene und ist ein regelmäßiges Sechseck OABCDE mit dem Mittelpunkt $M(3|3\sqrt{3}|0)$. Die Seiten des Sechsecks sind jeweils 6 m lang. Der Punkt O liegt im Koordinatenursprung, A hat die Koordinaten $(6|0|0)$ und A_1 die Koordinaten $(6|0|4)$. Das Dach des Zeltes wird durch eine regelmäßige sechseckige Pyramide gebildet. Die Spitze S des Zeltes liegt senkrecht über M in einer Höhe von 6 m. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden.



Zusätzlich zeigt die folgende Zeichnung den Grundriss des Zeltes in der x_1-x_2-Ebene.



Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

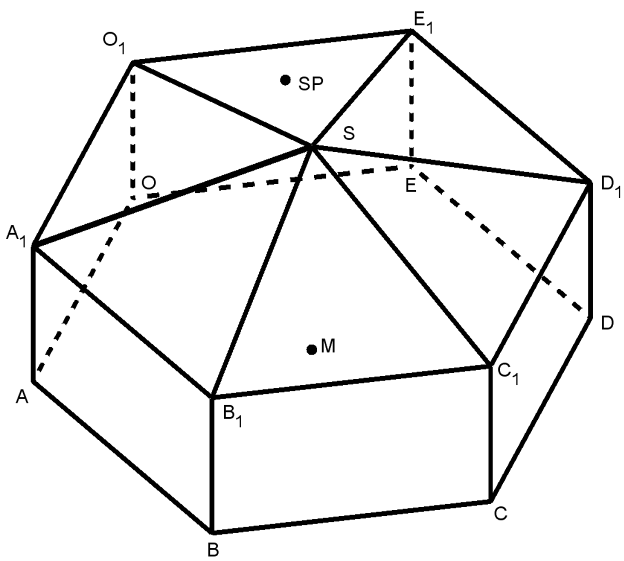
3 **1.1** Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte B, C und C_1.

4 **1.2** Für das Zelt und die Zirkuswagen wird eine Stellfläche benötigt, die 2,5-mal so groß ist wie die Grundfläche des Zirkuszeltes. Ein Landwirt stellt dem Zirkus eine Wiese mit einer Fläche von 240 m² zur Verfügung.
Prüfen Sie, ob diese Fläche groß genug ist.
[Teilergebnis: $A_{Zelt} \approx 93{,}5\,m^2$]

3 **1.3** Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, welche durch die Punkte $O_1(0|0|4)$, $E_1(-3|3\sqrt{3}|4)$ und $S(3|3\sqrt{3}|6)$ festgelegt wird.
[Mögliches Ergebnis: $F: x_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 + 3x_3 = -12$]

3 **1.4** Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene F aus Teilaufgabe 1.3 gegenüber der Grundfläche des Zeltes.

5 **1.5** Vom Schwerpunkt SP des Dreiecks O_1SE_1 soll senkrecht zur Ebene F ein Drahtseil bis zum Boden gespannt werden. Berechnen Sie die Länge dieses Seils.

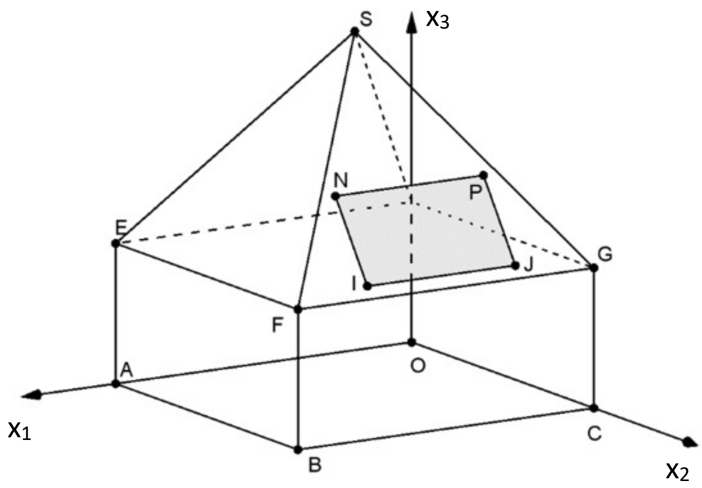


5 **1.6** Zur Abendvorstellung soll ein Lichtstrahl auf die Seitenfläche OAA_1O_1, in der sich auch der Eingang befindet, treffen. Dazu wird auf einem Mast ein Spotlight installiert, dessen Lichtstrahl durch $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}^+$ beschrieben wird. Prüfen Sie, ob der Lichtstrahl des Spotlights die Seitenfläche OAA_1O_1 trifft. Geben Sie gegebenenfalls an, wie die Position des Spotlights am Mast verändert werden muss, damit die gewünschte Beleuchtung erzielt wird, wenn der Lichtstrahl nach wie vor parallel zu h verlaufen soll.

23

BE

Ein Haus hat die Form eines Quaders mit oben aufgesetzter Pyramide. Das Haus wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Der Punkt O liegt im Koordinatenursprung und die Punkte A und C liegen auf den Koordinatenachsen. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der durch die Punkte O, A, B und C festgelegten quadratischen Grundfläche des Hauses. Die südliche Dachfläche wird durch die Punkte $F(12|12|5)$, $G(0|12|5)$ und $S(6|6|13)$ begrenzt. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.



5 **1** Der Bauherr geht davon aus, dass bei einer Dachflächenneigung von mindestens 50° gegenüber der Grundfläche Schnee problemlos von der Dachfläche abrutschen kann. Untersuchen Sie, ob die Dachneigung des Hauses hierfür ausreicht.

2.0 Auf der südlichen Dachfläche ist ein Sonnenkollektor angebracht, der durch das Rechteck IJPN dargestellt wird. Die Kante $\overline{IJ}$ verläuft parallel zur Kante $\overline{FG}$. Ferner gilt: $I(9|11{,}7|5{,}4)$, $J(3|11{,}7|5{,}4)$ und $|\overrightarrow{IN}| = |\overrightarrow{JP}| = 3{,}5\,\text{m}$.

6 **2.1** Der Punkt $M_{\overline{FG}}$ ist der Mittelpunkt der Kante $\overline{FG}$. Erläutern Sie, dass der Vektor $\overrightarrow{ON}$ mit Hilfe der Gleichung $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \frac{|\overrightarrow{IN}|}{|\overrightarrow{M_{\overline{FG}}S}|} \cdot \overrightarrow{M_{\overline{FG}}S}$ berechnet werden kann und bestimmen Sie die Koordinaten von N.
[Ergebnis: $N(9|9{,}6|8{,}2)$]

5 **2.2** Berechnen Sie den prozentualen Anteil der südlichen Dachfläche, die vom Sonnenkollektor bedeckt ist.

7 **2.3** Die Position einer Satellitenanlage auf dem Dach eines Nachbarhauses lässt sich stark vereinfacht durch den Punkt $Z(15|27|17)$ beschreiben. Die Einstrahlrichtung der Sonne wird zum Zeitpunkt des vermuteten Leistungsmaximums des Sonnenkollektors durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschrieben. Untersuchen Sie durch Rechnung, ob der Schattenwurf der Satellitenanlage zum Zeitpunkt des vermuteten Leistungsmaximums innerhalb der Sonnenkollektorfläche liegt. Ermitteln Sie hierfür zunächst eine Gleichung der durch die südliche Dachfläche festgelegten Ebene E in geeigneter Darstellungsform.

23