

## **Abiturprüfung 2020**

zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife  
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Donnerstag, 28. Mai 2020, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

# **Mathematik**

**Ausbildungsrichtung Technik - CAS**

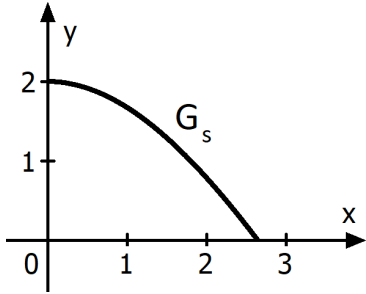
## **Teil 2: mit Hilfsmitteln**

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 6 **1** Gegeben ist die Funktion  $s: x \mapsto 8 - 2\sqrt{x^2 + 9}$  mit der Definitionsmenge  $D_s = [0; \sqrt{7}]$ . Ihr Graph  $G_s$  (siehe Abbildung rechts) rotiert um die y-Achse und beschreibt damit eine rotationssymmetrische Lehmhütte. Die Lehmhütte ist in der Mitte 2,0 m hoch und hat am Boden einen Durchmesser von ca. 5,29 m. Berechnen Sie **ohne CAS** das Volumen der Lehmhütte auf  $0,01 \text{ m}^3$  genau.
- 
- 2.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto -\frac{4x+2}{x^2+1}$  mit der Definitionsmenge  $D_f = ]-\infty; 3]$ . Ihr Graph wird mit  $G_f$  bezeichnet.
- 2 **2.1** Geben Sie die Nullstelle von  $f$  sowie die Art und die Gleichung der Asymptote von  $G_f$  an.
- 6 **2.2** Ermitteln Sie rechnerisch ohne Verwendung der zweiten Ableitung von  $f$  jeweils die Art und die x-Koordinaten aller Extrempunkte von  $G_f$ .  
[ Mögliches Teilergebnis:  $f'(x) = 4 \cdot \frac{x^2 + x - 1}{(x^2 + 1)^2}$  ]
- 4 **2.3** Zeichnen Sie  $G_f$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für  $-4 \leq x \leq 3$  in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 1 cm).
- 6 **2.4**  $G_f$  schließt zusammen mit den Koordinatenachsen im III. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung in Aufgabe 2.3 und berechnen Sie **ohne CAS** die Maßzahl seines Flächeninhalts auf 2 Nachkommastellen genau.
- 5 **2.5** Die Funktion  $h: x \mapsto f(x)$  mit der Definitionsmenge  $D_h = [-1; \frac{1}{2}] \setminus \{-\frac{1}{2}\}$  ist umkehrbar (eine Begründung ist nicht erforderlich). Ihre Umkehrfunktion wird mit  $h^{-1}$  bezeichnet. Bestimmen Sie einen Term von  $h^{-1}$  und entscheiden Sie ohne weitere Berechnungen, ob es einen Punkt des Graphen von  $h^{-1}$  gibt, in dem der Graph von  $h^{-1}$  eine Tangente mit der Steigung 0,5 besitzt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.6.0 Des Weiteren ist die Funktion  $g: x \mapsto \ln(f(x))$  mit maximaler Definitionsmenge  $D_g \subset \mathbb{R}$  gegeben.

3 2.6.1 Geben Sie  $D_g$  und die Gleichung der Asymptoten des Graphen von  $g$  an und berechnen Sie die Nullstellen von  $g$ .

4 2.6.2 Entscheiden Sie mit Begründung **ohne CAS**, ob  $g$  die Wertemenge  $W = ]-\infty; 1]$  besitzt.

7 3 Ein Schritt beim Bierbrauen ist das sogenannte Anstellen. Hierbei werden zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  ca. 400 Milliarden Hefezellen zu 50 Liter Würze beigemischt. Diese Mischung gärt nun 8 Tage lang. Anfangs vermehren sich die Hefezellen nahezu ungestört, jedoch tötet der entstehende Alkohol Hefezellen ab.

Die Anzahl  $z(t)$  der Hefezellen in der Mischung mit 50 Liter Würze zum Zeitpunkt  $t$  in Tagen nach der Beimischung der Hefezellen genügt der folgenden separierbaren Differenzialgleichung  $\dot{z} + 0,03 \cdot e^{0,5t} \cdot z = 0,5 \cdot z$ . Dabei sind  $z \in \mathbb{R}^+$  und  $t \in [0; 8]$ .

Bestimmen Sie **ohne CAS** die spezielle Lösung der Differenzialgleichung zum vorliegenden Anfangswertproblem und begründen Sie, ob am Ende des Gärvorgangs noch mindestens so viele Hefezellen in der Mischung sind wie anfangs beigemischt wurden.

[ Mögliches Teilergebnis:  $z(t) = D \cdot e^{0,5t - 0,06 \cdot e^{0,5t}}$  mit  $D \in \mathbb{R}^+$  ]

43

BE

**1.0** Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto x + \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  
Der Graph dieser Funktion wird mit  $G_f$  bezeichnet.

**1.1** Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte  $f(x)$  in der Umgebung der Definitionslücke von  $f$ .

**1.2** Ermitteln Sie **ohne CAS** das Monotonieverhalten von  $G_f$  und bestimmen Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunkts von  $G_f$ .

[ Mögliches Teilergebnis:  $f'(x) = \frac{2x^2 + 2x}{(x+1)^2 + x^2}$  ]

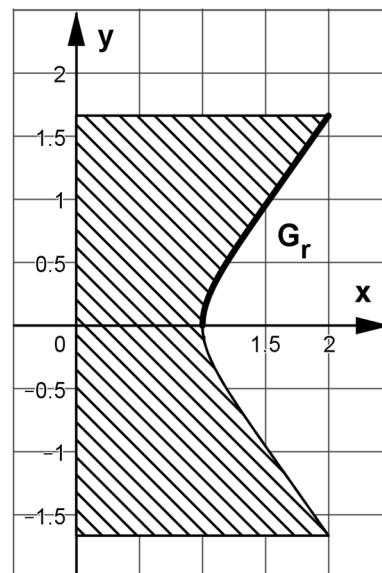
**1.3** Geben Sie eine Gleichung der schiefen Asymptote von  $G_f$  an. Zeichnen Sie anschließend den Graphen von  $f$  für  $-3 \leq x \leq 3$  sowie seine schiefe Asymptote unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 1 cm).

**1.4** Gegeben ist die Funktion  $F: x \mapsto \int_{-2}^x f(t) dt$  mit der Definitionsmenge  $D_F = ]-\infty; -0,5]$ .

Bestimmen Sie ohne Berechnung der integralfreien Darstellung von  $F(x)$  die Art und die  $x$ -Koordinate des Extrempunkts des Graphen von  $F$  und sein Krümmungsverhalten. Geben Sie außerdem die Nullstelle von  $F$  an.

**2** Es soll eine Vogeltränke aus einem Holzzylinder hergestellt werden. Die Vogeltränke wird beschrieben durch die Rotation der rechts abgebildeten schraffierten Figur um die  $x$ -Achse. In der Abbildung bezeichnet  $G_r$  den Graphen der Funktion  $r: x \mapsto \sqrt{x^2 \ln(x)}$  für  $1 \leq x \leq 2$ .

Bestimmen Sie **ohne CAS** die Maßzahl des Volumens der Vogeltränke auf zwei Nachkommastellen gerundet.



*Fortsetzung siehe nächste Seite*

- 3.0** Ein Inline-Skater rollt ohne zusätzlichen Antrieb aus dem Stillstand eine geneigte Ebene hinab. Für die Geschwindigkeit  $v(t)$  des Skaters (in Metern pro Sekunde) zum Zeitpunkt  $t$  (in Sekunden) mit  $t \geq 0$  gilt die Differenzialgleichung:

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) - \frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2.$$

Mit den Daten  $m = 78 \text{ kg}$ ,  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $\alpha = 5,00^\circ$ ,  $\mu = 0,038$ ,  $c_w = 0,78$ ,  $A = 0,70 \text{ m}^2$ ,  $\rho = 1,14 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  und unter Verzicht auf die Einheiten lässt sich die Differenzialgleichung vereinfacht in der Form  $\dot{v} = 0,484 - 0,0040 \cdot v^2$  darstellen (Nachweis nicht erforderlich).

- 8 **3.1** Lösen Sie **ohne CAS** die Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung  $v(0) = 0$ .

[ Mögliches Teilergebnis:  $v_{\text{allgemein}}(t) = 11 \cdot \frac{1 - D \cdot e^{-0,088 \cdot t}}{1 + D \cdot e^{-0,088 \cdot t}}$  ]

- 5 **3.2** Die Geschwindigkeit des Inline-Skaters lässt sich auch in der Form  $v(t) = 11 \cdot \left( 1 - \frac{2e^{-0,088 \cdot t}}{1 + e^{-0,088 \cdot t}} \right)$  darstellen (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie **ohne**

**CAS** das Integral  $\int_0^{10} v(t) dt$  und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

- 3 **3.3** Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von  $v$  und geben Sie die Bedeutung des Ergebnisses für den vorliegenden Sachzusammenhang an.

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Nach Ihrem Studium arbeiten Sie in einer Süßwarenfabrik, in der Sie unter anderem für die Qualitätssicherung zuständig sind. In der Fabrik werden auch Schokoladentafeln à 100 g hergestellt.

- 5 **1** In der Qualitätskontrolle wird eine Tafel auf ihr Sollgewicht hin überprüft. Die Zufallsgröße  $X$  gibt das gemessene Gewicht in Gramm an. In folgender Tabelle ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  dargestellt. Durchschnittlich wiegt eine Tafel 99,94 g.

$x$	98,5	99	100	101	101,5
$P(X = x)$	0,05	0,10	0,75	0,07	0,03

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Gewicht einer zufällig herausgegriffenen Tafel Schokolade innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

- 2 **2** Ein Defekt in der Abfüllanlage der Schokoladenmasse erhöht die Gewichtsschwankungen bei den Tafeln. Die Zufallsgröße  $Y$  gibt an, um wie viel Gramm das Gewicht einer Tafel von ihrem Sollgewicht abweicht. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $Y$  ist in folgender Tabelle dargestellt:

$y$	4 g zu leicht	2 g zu leicht	0 g	2 g zu schwer	4 g zu schwer
$P(Y = y)$	0,30	0,20	0,35	0,10	0,05

Bis zur Reparatur der Anlage soll die Maschine so eingestellt werden, dass das Durchschnittsgewicht einer Tafel 100 g beträgt.

Berechnen Sie den Wert für die einzustellende Gewichtsvorgabe der Abfüllanlage.

- 3.0** Die Schokoladentafeln gibt es in herkömmlicher Qualität sowie in Bioqualität. Der Hersteller bietet Nusschokoladen (N) und nussfreie Tafeln an. Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass von den Käufern der Nusschokolade 32 % Bioqualität wählen und sich 22 % der Käufer der nussfreien Sorte für das Bioprodukt entscheiden. Im Verkauf beträgt der Bioanteil (B) insgesamt 25 %.
- 5 **3.1** Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms den prozentualen Anteil der Nusschokoladen im Verkauf.
- 2 **3.2** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 24 verkauften Schokoladentafeln genau 25 % Bioqualität haben.

*Fortsetzung siehe nächste Seite*

BE

**4.0** In den vergangenen Monaten kam es vermehrt zu Reklamationen von Seiten der Großabnehmer. Durchschnittlich gingen bei 10 % der Lieferungen Beanstandungen ein. Daher wurden Maßnahmen zur Qualitätsverbesserung der Schokoladen durchgeführt. Um zu überprüfen, ob der Anteil der reklamierten Lieferungen nach Abschluss der Verbesserungsmaßnahmen gesunken ist (Gegenhypothese), werden 200 Lieferungen im Hinblick auf Reklamationen untersucht.

Die Fabrikleitung sieht folgendes Testverfahren vor: Sollten bei höchstens 14 der Lieferungen Beanstandungen eingehen, so geht man davon aus, dass die qualitätsverbessernden Maßnahmen erfolgreich waren und will die dafür zuständigen Mitarbeiter mit einer Bonuszahlung belohnen.

4 **4.1** Berechnen Sie für diesen Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art und deuten Sie diese im Sachzusammenhang.

5 **4.2** Die Verbesserungsmaßnahmen haben dazu geführt, dass der Anteil  $p$  der Beanstandungen auf einen Wert von 5 % gesunken ist. Bestimmen Sie hierfür die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art und erläutern Sie den Zusammenhang zwischen dem Fehler 2. Art und der Bonuszahlung für die betroffenen Mitarbeiter.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Ein Großhändler für Saatgut verkauft Säcke verschiedener Sorten von Samenkörnern. Erfahrungsgemäß handelt es sich bei 15% der verkauften Säcke um Saatgut für Viehweide (V). Säcke mit Samen für Sommerroggen (S) werden viermal so oft verlangt wie die mit Weißklee (W). Weißklee und Grasmischung (G) machen die Hälfte der verkauften Säcke aus. Nur 3% sind Säcke mit Samen für Blumenwiese (B). Die Preise pro Sack können nachfolgender Preisliste entnommen werden.

Sorte	Preis pro Sack
• Viehweide	32,00 €
• Sommerroggen	26,00 €
• Weißklee	30,00 €
• Grasmischung	28,50 €
• Blumenwiese	20,00 €

- 5 **1.1** Die Zufallsgröße  $X$  gibt den Preis pro verkauftem Sack in Euro an. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$ .  
[Teilergebnis:  $P(W) = 0,08$ ]
- 2 **1.2** Berechnen Sie – unter Verwendung von Aufgabe 1.1 – den durchschnittlich zu erwartenden monatlichen Gewinn durch den Verkauf des Saatguts, wenn bekannt ist, dass der Großhändler pro Monat 120 Säcke Saatgut verkauft und ihm 30% vom Verkaufspreis als Gewinn bleiben.
- 2.0** Aufgrund von Kundenanfragen und da der Großhändler ein günstiges Angebot für Rotklee erhalten hat, will er in Zukunft eine Kleemischung aus Weißklee (W) und Rotklee (R) anbieten. Laut dem Samenproduzenten liegt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samenkorn vom Weißklee keimt, bei 92,5%. Die Keimwahrscheinlichkeit der Rotkleesamen liegt bei 80%.
- 5 **2.1** Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms, in welchem Verhältnis der Großhändler Weiß- und Rotkleesamen mischen muss, damit die Keimwahrscheinlichkeit  $P(K)$  der Mischung bei 85% liegt.
- 4 **2.2** Ein Landwirt kauft einen Sack der neuen Kleemischung, welche zu 85% keimt, und sät 200 Samenkörner auf einem kleinen frischgepflügten Teil einer seiner Wiesen aus. Die Zufallsgröße  $Y$  gibt die Anzahl der keimenden Samen an. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der keimenden Samen innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

*Fortsetzung siehe nächste Seite*



BE

- 3.0** Eine Gärtnerin möchte den Bienen in ihrer Umgebung etwas Gutes tun und kauft einen Sack Saatgut für eine Blumenwiese. Der Großhändler behauptet, dass die Blumensamen zu 90 % keimen. Jedoch vermutet die Gärtnerin, dass es weniger sind (Gegenhypothese). Ist dies der Fall, so will sie ihr Saatgut in Zukunft von einem anderen Großhändler beziehen. Um ihre Vermutung zu überprüfen, sät sie 100 zufällig ausgewählte Samenkörner aus und beobachtet deren Keimverhalten. Sie will sich bei der Annahme ihrer Vermutung um höchstens 4 % irren.
- 5 **3.1** Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest für die Gärtnerin und geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 87 Blumensamen keimen.
- 2 **3.2** Berechnen Sie für den in Aufgabe 3.1 entwickelten Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn man davon ausgeht, dass der Anteil der keimenden Samen bei 85 % liegt.

23