

# **Ergänzungsprüfung**

## **zum Erwerb der Fachhochschulreife 2020**

**Prüfungsfach:** **Mathematik**  
**(nichttechnische Ausbildungsrichtungen)**

**Prüfungstag:** **Donnerstag, 16. Juli 2020**

**Prüfungsdauer:** **9:00 Uhr – 12:00 Uhr**

**Hilfsmittel:** **Elektronischer, nicht programmierbarer**  
**Taschenrechner;**  
**Merkhilfe LPPLUS Mathematik (Technik)**

**Hinweise:** Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.

**Bewertungsschlüssel:**

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

## Aufgabe I

BE

- 1.0** Gegeben ist die Funktion  $f$  durch ihre Funktionsgleichung  
 $f(x) = \frac{3}{25}x(x-2)(x+3)^2$  mit  $D_f = \mathbb{R}$ .  
 Der Graph von  $f$  in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_f$  bezeichnet.  
 Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.
- 1.1** Geben Sie die Nullstellen der Funktion  $f$  und ihre jeweilige Vielfachheit an. 2
- 1.2** Zeigen Sie rechnerisch, dass sich die Funktionsgleichung von  $f$  auch in der  
 allgemeinen Form  $f(x) = \frac{3}{25}(x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 18x)$  darstellen lässt. 2
- 1.3** Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von  $f$ . 6
- 1.4** Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von  $f$  und bestimmen Sie  
 die Koordinaten der Wendepunkte von  $G_f$ . 5  
 [Mögliches Teilergebnis:  $W_1(-2,22 | f(-2,22))$ ]
- 1.5** Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Wendetangente  $w_1$  an  $G_f$ , welche durch  
 den Wendepunkt  $W_1$  verläuft. 2  
 [Mögliches Ergebnis:  $w_1(x) = 1,28x + 3,52$ ]
- 1.6** Zeichnen Sie  $G_f$  und den Graphen  $G_{w_1}$  von  $w_1$  unter Verwendung aller bisherigen  
 Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für  $-4 \leq x \leq 2,5$  in ein  
 kartesisches Koordinatensystem. 4
- 1.7** Der Graph  $G_f$ , die Tangente  $G_{w_1}$  und die  $y$ -Achse schließen im II. Quadranten des  
 Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. 4  
 Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der graphischen Darstellung aus Aufgabe  
 1.6 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

## Aufgabe II

BE

- 2.0** Die Funktion  $f$  mit  $D_f = \mathbb{R}$  ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Der Graph  $G_f$  der Funktion  $f$  verläuft durch den Punkt  $A(-1|-2,4)$  und hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der Wendetangente  $t_{WP}(x) = 2,5x$ .  
Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf eine Nachkommastelle.
- 2.1** Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion  $f$ .  
[Mögliches Ergebnis:  $f(x) = -0,1x^3 + 2,5x$ ]
- 2.2** Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion  $f$ .
- 2.3** Geben Sie die Symmetrieeigenschaften des Funktionsgraphen  $G_f$  an und begründen Sie Ihre Entscheidung.
- 2.4** Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen von  $f$  und bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von  $G_f$ .
- 2.5** Zeichnen Sie  $G_f$  unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für  $-6 \leq x \leq 6$  in ein kartesisches Koordinatensystem.
- 2.6.0** Für  $0 \leq u \leq 5$  bilden die Punkte  $B(0|0)$ ,  $C(u|0)$  und  $D(u|f(u))$  im I. Quadranten das Dreieck  $BC_uD_u$ .
- 2.6.1** Zeichnen Sie für  $u = 4$  das Dreieck  $BC_4D_4$  in das Koordinatensystem aus Aufgabe 2.5 ein.
- 2.6.2** Bestimmen Sie allgemein die Fläche  $A$  des Dreiecks  $BC_uD_u$  in Abhängigkeit von  $u$ .  
[Mögliches Ergebnis:  $A(u) = -\frac{1}{20}u^4 + \frac{5}{4}u^2$ ]
- 2.6.3** Berechnen Sie den Wert von  $u$  so, dass das Dreieck  $BC_uD_u$  den größtmöglichen Flächeninhalt annimmt. Ermitteln Sie auch die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche.

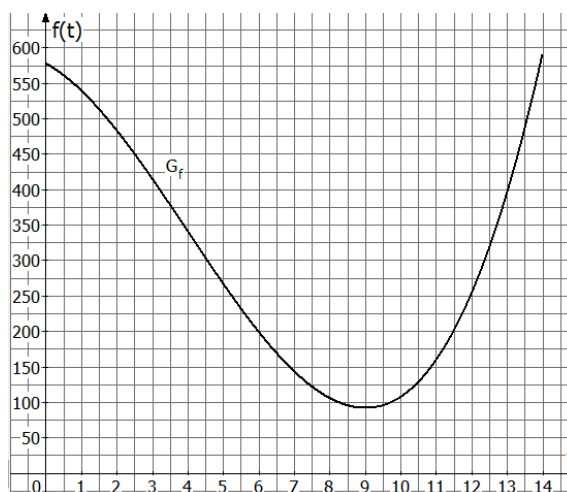
## Aufgabe III

BE

- 3.0** Die Zahl der freien Stellplätze in einer Parkgarage mit einer Gesamtkapazität von 600 Parkplätzen kann an einem Werktag zwischen 6:00 Uhr und 20:00 Uhr in guter Näherung durch die Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = t^3 - 12t^2 - 27t + 578$$

beschrieben werden. Die Funktion  $f$  gibt die Anzahl der freien Stellplätze in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  [in Stunden] an. Hierbei entspricht  $t_0 = 0$  der Uhrzeit 6:00 Uhr. Der zugehörige Graph wird mit  $G_f$  bezeichnet (vgl. Abbildung).



Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

- 3.1** Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich an und weisen Sie rechnerisch nach, dass um 7:00 Uhr noch 90 % der Stellplätze frei sind. 3
- 3.2** Im Laufe des Vormittags sinkt die Zahl der freien Plätze schnell. Berechnen Sie, zu welcher Uhrzeit die Anzahl der freien Plätze am stärksten abnimmt. 4
- 3.3** Lesen Sie aus dem Graphen  $G_f$  ab, um welche Uhrzeit (auf 0,5 Stunden genau) das Parkhaus zum ersten Mal zur Hälfte belegt ist. 2
- 3.4** Zeigen Sie rechnerisch, dass um 12:00 Uhr genau  $\frac{2}{3}$  der Stellplätze belegt sind. 2
- 3.5** Für  $t=6$  stehen 200 freie Stellplätze zur Verfügung. Berechnen Sie, in welchem Zeitintervall (auf Minuten genau) höchstens 200 freie Stellplätze zur Verfügung stehen. 6
- 3.6** Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der die meisten Parkplätze belegt sind, sowie die Anzahl der zu dieser Zeit belegten Parkplätze. 5
- 3.7** Am Nachmittag werden wieder mehr Stellplätze frei. Berechnen Sie die durchschnittliche Zunahme der freien Plätze zwischen 17:00 Uhr und 20:00 Uhr in Prozent. 3

## Aufgabe IV

BE

**4.0** Anna und Hans Müller planen, einen Neuwagen und einen Oldtimer zu kaufen. Sie recherchieren im Vorfeld über die Wertentwicklung beider Autos.

Die zeitliche Veränderung des Marktwerts des Neuwagens bzw. Oldtimers kann nach ihrer Einschätzung in guter Näherung durch die Funktionen  $n$  und  $s$  mit folgenden Funktionsgleichungen beschrieben werden:

$$n(t) = 40000 \cdot e^{a \cdot t} + 300 \quad (\text{Neuwagen})$$

$$s(t) = 20000 \cdot e^{k \cdot t} + 2000 \quad (\text{Oldtimer})$$

Dabei geben  $n(t)$  bzw.  $s(t)$  den momentanen Marktwert in Euro und  $t$  die Zeit ab Kauf in Jahren an. Die reellen Konstanten  $a$  und  $k$  müssen im Folgenden noch ermittelt werden.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.

**4.1** Bestimmen Sie den Kaufpreis des Neuwagens und des Oldtimers. 2

**4.2** Nach einer Statistik hat der Neuwagen nach 5 Jahren bereits 60 % seines Wertes verloren, während der Oldtimer nach 5 Jahren das 1,6 fache seines Kaufpreises wert ist. Berechnen Sie aufgrund dieser Daten den Wert des Neuwagens und des Oldtimers nach 5 Jahren ab Kaufdatum. 3

**4.3** Ermitteln Sie unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus 4.2 die Konstanten  $a$  und  $k$  und geben Sie die Funktionsgleichungen der Funktionen  $n$  und  $s$  entsprechend an. 6  
[Mögliches Teilergebnis:  $a = -0,19$  ;  $k = 0,10$ ]

**4.4** Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion  $n$ . 5  
Geben Sie (ohne weitere Rechnung) das Monotonieverhalten der Funktion  $s$  an.  
Interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

**4.5** Führen Sie eine Grenzwertbetrachtung von  $n$  für  $t \rightarrow \infty$  durch. 2  
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

**4.6** Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf des momentanen Wertes für beide Fahrzeuge für  $0 \leq t \leq 10$  in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie hierzu einen geeigneten Maßstab. 4

**4.7** Herr Müller behauptet, dass nach 10 Jahren ab Kauf beide Autos zusammen mehr wert sind als beide zusammen zum Zeitpunkt des Kaufs. 3  
Überprüfen Sie seine Behauptung.

## Aufgabe V

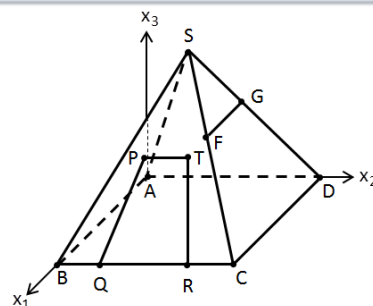
BE

- 5.0** Eine Jugendgruppe eines Vereins baut sich ein Zelt in Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Nebenstehende, nicht maßstabsgetreue Abbildung zeigt modellhaft dieses Zelt.

Die Eckpunkte des Zeltes haben die Koordinaten  $A(0|0|0)$ ,  $B(4|0|0)$ ,  $C(4|4|0)$ ,  $D(0|4|0)$ .

Ausgehend von diesen Punkten verläuft jeweils zur Spitze  $S(2|2|3,5)$  des Zeltes eine Außenstange.

In der Abbildung sind nicht alle Quer- bzw. Stützstreben gekennzeichnet. Die Dicke der Stangen bleibt bei der Berechnung unberücksichtigt. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.



- 5.1** Berechnen Sie die Gesamtlänge der vier Außenstangen, die sich im Punkt S treffen. 2
- 5.2** Die Jugendgruppe kauft den Zeltstoff für die Seitenflächen ein, wobei ein Quadratmeter 12,99 Euro kostet. Weiterhin gilt, dass mit einem Verschnitt sowie Nahtzugabe von insgesamt 15 % gerechnet werden muss. 5
- Zeigen Sie rechnerisch, dass das vorhandene Budget in Höhe von 500 Euro ausreicht, um die Kosten für das Material zu decken.
- 5.3** Die Jugendlichen überlegen, wie steil die Seitenwände des Zeltes sind. Berechnen Sie hierzu den Winkel zwischen der Grundfläche und der Seitenfläche CDS. 4
- 5.4** In der Vorderfläche BCS befindet sich mittig eine Einstiegsöffnung PQRT in Form eines symmetrischen Trapezes. P und T sind die Mittelpunkte der Strecke  $\overline{QS}$  bzw.  $\overline{RS}$ . Die Eingangsöffnung hat zwischen Q und R eine Länge von 2,0 Metern. Berechnen Sie, wie viel Prozent der Vorderfläche die Einstiegsöffnung beansprucht. 7
- 5.5** Zur Stabilisierung des Zeltes gibt es ein umlaufendes Quergestänge, welches parallel zum Boden verläuft. In der Abbildung ist dies beispielhaft durch die Strecke  $\overline{FG}$  veranschaulicht. Der Punkt F liegt auf der Strecke  $\overline{CS}$ , der Punkt G auf der Strecke  $\overline{DS}$ . Der Abstand von C zu F beträgt  $\frac{3}{5}$  des Abstandes von C zu S. 5
- Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte F und G und berechnen Sie die Länge  $\overline{FG}$  der Querstange.
- [Mögliches Teilergebnis:  $G(1,2|2,8|2,1)$ ]
- 5.6** Aus sicherheitstechnischen Gründen muss sich das Quergestänge aus 5.5 auf einer Höhe von mindestens 2,0 Metern befinden. Begründen Sie, ob die Anforderungen an die Sicherheit gegeben sind. 2