

# **Ergänzungsprüfung**

## **zum Erwerb der Fachhochschulreife 2020**

**Prüfungsfach:** **Mathematik**  
**(technische Ausbildungsrichtung)**

**Prüfungstag:** **Donnerstag, 16. Juli 2020**

**Prüfungsdauer:** **9:00 Uhr – 12:00 Uhr**

**Hilfsmittel:** **Elektronischer, nicht programmierbarer**  
**Taschenrechner;**  
**Merkhilfe LPPLUS Mathematik (Technik)**

**Hinweise:** Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.  
Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.  
Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.  
Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.

**Bewertungsschlüssel:**

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

## Aufgabe I

BE

- 1.0** Gegeben ist die reelle Funktion  $a$  durch ihren Term  $a(x)$  mit

$$a(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2$$

auf der maximalen Definitionsmenge  $D_a = \mathbb{R}$ .

Der Graph der Funktion  $a$  in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_a$  bezeichnet.

Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.

- |              |  |   |
|--------------|--|---|
| <b>1.1</b>   | Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion $a$ und geben Sie deren jeweilige Vielfachheit an.   | 3 |
| <b>1.2</b>   | Bestimmen Sie die Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen $G_a$ .   | 5 |
| <b>1.3</b>   | Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen $G_a$ .  | 4 |
| <b>1.4</b>   | Zeichnen Sie den Graphen $G_a$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte im Bereich $-3 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.<br>(Maßstab: x-Achse: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm; y-Achse: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm)   | 4 |
| <b>1.5.0</b> | Gegeben sei nun die reelle Funktion $t$ durch ihre Funktionsgleichung<br>$t(x) = \sin(\pi x)$ auf der Definitionsmenge $D_t = \mathbb{R}$ .<br>Der Graph der Funktion $t$ in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit $G_t$ bezeichnet.   |   |
| <b>1.5.1</b> | Geben Sie alle Nullstellen der Funktion $t$ an.  | 2 |
| <b>1.5.2</b> | Zeichnen Sie den Graphen $G_t$ in das kartesische Koordinatensystem aus Aufgabe 1.4 im Bereich von $-2 \leq x \leq -1$ ein.  | 2 |
| <b>1.5.3</b> | Der Graph der Funktion $a$ , das in Aufgabe 1.5.2 gezeichnete Graphenstück der Funktion $t$ und die x-Achse begrenzen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück.<br>Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung aus Aufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. | 5 |

## Aufgabe II

BE

- 2.0 Gegeben ist die reelle Funktion  $f$  durch ihre Funktionsgleichung

$$f(x) = (1 - x) + \ln(x + 4).$$

Der Graph der Funktion  $f$  in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_f$  bezeichnet.

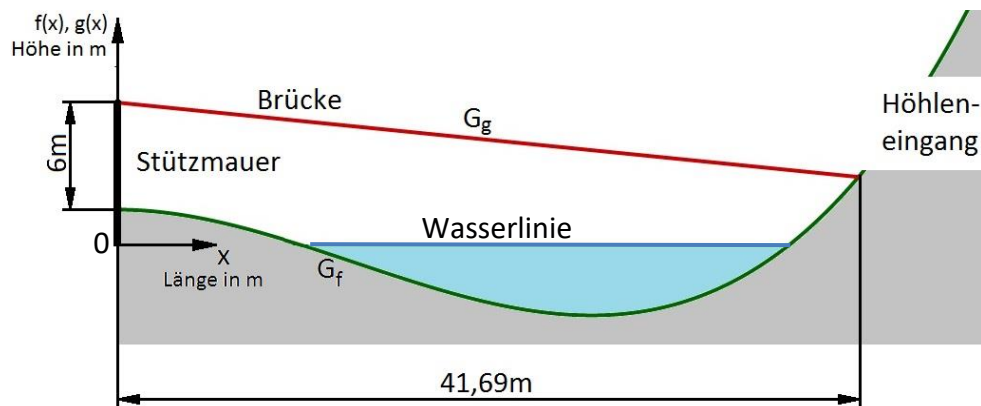
Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.

- 2.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge  $D_f$  der Funktion  $f$  und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte  $f(x)$  am linken Rand der Definitionsmenge. Geben Sie die Gleichung der Asymptote von  $G_f$  an. 4
- 2.2 Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  im Bereich  $2 < x < 3,9$  mindestens eine Nullstelle haben muss. Eine algebraische Berechnung der Nullstellen der Funktion  $f$  ist nicht verlangt. 3
- 2.3 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion  $f$  streng monoton steigt bzw. fällt. Geben Sie die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunktes von  $G_f$  an. 6  
[Mögliches Zwischenergebnis:  $f'(x) = \frac{-x-3}{x+4}$ ]
- 2.4 Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen  $G_f$ . 3
- 2.5 Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für  $-4 < x \leq 4$ , sowie die Asymptote von  $G_f$  in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab: x-Achse: 1 LE  $\hat{=}$  1 cm; y-Achse: 1 LE  $\hat{=}$  1 cm) 4
- 2.6 Weisen Sie nach, dass die Funktion  $F$ , gegeben durch ihre Funktionsgleichung  $F(x)$  mit  $F(x) = -0,5x^2 - 4 + (x + 4) \cdot \ln(x + 4)$  eine Stammfunktion der Funktion  $f$  ist. 2
- 2.7 Berechnen Sie das bestimmte Integral  $\int_2^{3,9} f(x) dx$  und interpretieren Sie das Ergebnis des Integrals auch mit Hilfe der Zeichnung aus 2.5. 3

## Aufgabe III

BE

- 3.0** Folgt man dem Verlauf eines Flusses, so gelangt man zu einer Stelle, die näherungsweise durch untenstehende Skizze dargestellt werden kann.



Zur Beschreibung des Flusses und seiner Umgebung wird der vertikale Querschnitt betrachtet und zur Querschnittsfläche ein kartesisches Koordinatensystem derart festgelegt, sodass die Begrenzungslinie des Querschnitts (Flussbett) durch den Graphen  $G_f$  einer Funktion  $f$  mit dem Term

$$f(x) = \frac{1}{1600}x^3 - \frac{1}{40}x^2 + 2$$

auf einem sinnvollen Definitionsbereich  $D_f$  beschrieben wird.

Dabei sind die Werte von  $x$  und die dazugehörigen Funktionswerte Längenangaben in der Einheit Meter.

Am linken Ufer befindet sich eine senkrechte Stützmauer, die 6,00 m aus dem Flussbett herausragt. Bei normalem Wasserstand befindet sich die Wasserlinie auf der Höhe  $f(x) = 0$ .

Der Ursprung des Koordinatensystems liegt am Fußpunkt des Fundamentes der Stützmauer (unterhalb des Flussbettes – siehe Skizze unter 3.0). Die Dicke der Stützmauer wird vernachlässigt.

Auf die Mitführung von Einheiten während der Berechnung kann verzichtet werden. Berechnen Sie die Ergebnisse gerundet auf zwei Nachkommastellen.

- 3.1** Am rechten Ufer wurde eine Höhle entdeckt. Um diese für Besucher zugänglich zu machen, soll eine Brücke (vgl. Skizze unter 3.0) mit folgenden Eigenschaften errichtet werden:

- Die Brücke hat eine Neigung von 10%.
- Die Brücke verläuft geradlinig und liegt links auf der Stützmauer auf.

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung  $g(x)$  der Funktion  $g$ , deren Graph  $G_g$  die Brücke beschreibt.

[Mögliches Ergebnis:  $g(x) = -\frac{1}{10}x + 8$ ]

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

**Aufgabe III** (Fortsetzung)**BE**

- |  |   |          |
|--|---|----------|
| <b>3.2</b>   | Berechnen Sie die Länge $\ell_B$ der Brücke, wenn sich der rechte Aufliegepunkt (vgl. Skizze unter 3.0) näherungsweise bei $x = 41,69$ m befindet.  | <b>2</b> |
| <b>3.3.0</b> Für die Stabilität der Brücke müssen senkrechte Stützen (parallel zur $f(x)$ - Achse) eingebaut werden. |   |          |
| <b>3.3.1</b>   | Ermitteln Sie die Funktionsgleichung $h(x)$ der Funktion $h$ dritten Grades die den Abstand zwischen Brücke und Flussbettprofil angibt.<br>Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für diese an.<br><br>[Mögliches Zwischenergebnis: $h(x) = -\frac{1}{1600}x^3 + \frac{1}{40}x^2 - \frac{1}{10}x + 6$ ]  | <b>3</b> |
| <b>3.3.2</b>   | Berechnen Sie jeweils die Länge $\ell_S$ der Stützen für die beiden Fälle, dass die Stützen am meisten bzw. am wenigsten Material benötigen. Die Stützen sollen dabei im Bereich $x \in [0;26]$ aufgestellt werden. Die Verankerung der Stützen im Boden soll unberücksichtigt bleiben.   | <b>6</b> |
| <b>3.4</b>   | Je steiler das Flussbett unter Wasser ist, desto höher ist die Gefahr, dass vorbei strömendes Wasser Veränderungen am Flussbett verursacht. Die rechte Uferseite weist einen Böschungswinkel von etwa $38^\circ$ auf, daher wurde diese bereits mit Steinen befestigt. Somit ist für Ihre Untersuchung nur der Bereich für $x \in [0;26]$ relevant.<br><br>Bestimmen Sie den Punkt (siehe Skizze 3.0) in dem das Flussbett am steilsten ist.<br><br>Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes und den zugehörigen Neigungswinkel an dieser Stelle. | <b>6</b> |
| <b>3.5</b>   | Der Wasserspiegel steigt bis zur Oberkante des Flussbettprofils an der linken Uferseite an.<br><br>Berechnen Sie die Maßzahl der wasserführenden Querschnittsfläche $A$ des Flussprofils in Quadratmeter bei diesem Pegel.  | <b>5</b> |

## Aufgabe IV

BE

- 4.0** Eine Person trinkt zum Zeitpunkt  $t=0$  eine Tasse Kaffee. Durch die Funktion  $g$  wird die Koffeinkonzentration im Blut dieser Person beschrieben. Gegeben ist die Funktion  $g$  mit ihrem Term:

$$g(t) = \frac{7}{2}t \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \text{ mit } t \in [0; \infty[.$$

Dabei gibt  $g(t)$  die Konzentration von Koffein und  $t$  die vergangene Zeit in Stunden an. Der Graph der Funktion  $g$  wird mit  $G_g$  bezeichnet.

Auf die Mitführung von Einheiten kann während der Berechnung verzichtet werden.

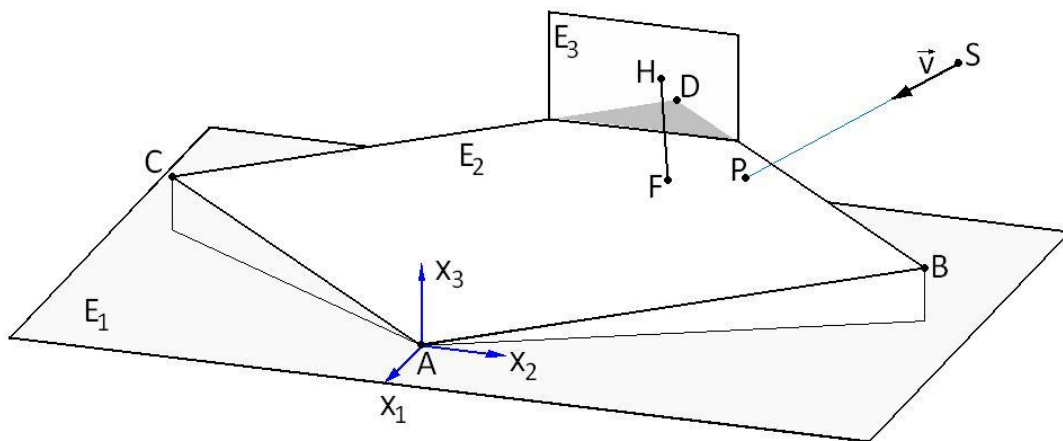
- 4.1** Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte  $g(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  und interpretieren Sie dieses im Sachzusammenhang. 2
- 4.2** Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Koffeinkonzentration im Blut am höchsten ist und berechnen Sie diese Konzentration. 5
- [Mögliches Zwischenergebnis:  $g'(t) = (-\frac{21}{8}t + \frac{7}{2}) \cdot e^{-\frac{3}{4}t}$ ]
- 4.3** Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen  $G_g$  im Bereich  $0 \leq t \leq 7$  in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab:  $t$ -Achse: 1 LE  $\hat{=}$  1 cm;  $g(t)$ -Achse: 1 LE  $\hat{=}$  2 cm) 3
- 4.4** Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Koffeinkonzentration am stärksten abfällt und geben Sie die Konzentration zu diesem Zeitpunkt an. 5
- 4.5** Ab dem Zeitpunkt  $t_h = \frac{9}{2}$  kann der Abbau der Koffeinkonzentration durch die Tangente  $h$  an der Stelle  $t_h$  an den Graphen  $G_g$  angenähert werden. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente  $h$  und zeichnen Sie diese für  $t \geq \frac{9}{2}$  bis zum Schnittpunkt mit der  $t$ -Achse in die Zeichnung aus Aufgabe 4.3 ein. 5
- Berechnen Sie mit Hilfe der Tangente den Zeitpunkt, zu dem das Koffein vollständig abgebaut ist. Die Werte für Steigung und Ordinatenabschnitt sind auf 2 Nachkommastellen zu runden.
- 4.6** Manche Menschen greifen zu Koffeintabletten, da diese eine stärkere Wirkung haben. Die zugehörige Koffeinkonzentration soll nun für  $0 \leq t \leq 8$  durch eine Exponentialfunktion  $k$  mit dem Funktionsterm  $k(t) = a \cdot t \cdot e^{bt}$ ;  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  beschrieben werden. Für eine bestimmte Tablettenart ist bekannt, dass die Koffeinkonzentration zum Zeitpunkt  $t=2$  mit  $8 \cdot e^{-1}$  den größten Wert erreicht. 5
- Berechnen Sie die Werte der Parameter  $a$  und  $b$  und geben Sie den Funktionsterm  $k(t)$  an.

25

## Aufgabe V

BE

- 5.0** Im Stadttheater wird für ein Drama von Schiller ein Bühnenbild entworfen. Trotz erschwelter Spielbedingungen für die Schauspieler wird das Podest schräg zur Bühne des Stadttheaters konstruiert, um einen besseren räumlichen Effekt auf der Bühne sowie eine bessere Sicht des Publikums zu ermöglichen. Die obere Fläche des geneigten Podestes ABCD hat die Form eines Parallelogramms. Es ist ein lokales kartesisches Koordinatensystem festgelegt (vgl. Skizze unten), das die Bühne (Ebene  $E_1$ ) durch die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene beschreibt. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Berechnung kann verzichtet werden.



- 5.1** Die folgenden Punkte sind bekannt:  
 $A(0|0|0)$ ,  $B(-4|8|1)$  und  $C(-4|-6|1)$   
 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D. 2
- 5.2** Für eine effektvolle Beleuchtung wird entlang der Kanten  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  ein LED - Leuchtband angebracht. 2  
 Berechnen Sie die Gesamtlänge des Leuchtbandes auf zwei Nachkommastellen genau.
- 5.3** Das geneigte Podest ABCD legt die Ebene  $E_2$  fest. 4  
 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $E_2$  in Parameter- und Koordinatenform.  
 [Mögliches Ergebnis:  $E_2: x_1 + 4x_3 = 0$ ]

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

**Aufgabe V** (Fortsetzung)**BE**

- 5.4** Am Ende der Vorstellung soll nur noch ein kleiner goldener Apfel, der auf dem Podest liegt, von einem Scheinwerfer (geradlinige und parallele Strahlen) angestrahlt werden. Der Scheinwerfer ist im Punkt  $S(3|11|7,75)$  befestigt. Der „Richtungsvektor“ des Scheinwerferlichtstrahls wird angegeben mit:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -6,25 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, auf dem der Apfel platziert werden muss, damit er direkt im Zentrum des Scheinwerferstrahles liegt. Der Durchmesser des Strahles bleibt dabei unberücksichtigt.

- 5.5** Im Punkt  $F(-5,6|3|1,4)$  der sich auf dem Podest befindet, wird eine Lanze senkrecht zur Ebene  $E_2$  eingerammt. Die für die Zuschauer sichtbare Länge der Lanze beträgt 3,80 m. Die Spitze der Lanze wird von einem von der Decke hängenden dünnen Seil gehalten. Bestimmen Sie für die Spitzenaufhängung die Koordinaten H der Lanze auf zwei Nachkommastellen genau.

- 5.6** Damit die Schauspieler noch angenehm ihr Stück aufführen können, soll der Neigungswinkel des Podestes zur waagerechten Ebene  $E_1$  ( $E_1: x_3 = 0$ ) der Bühne des Stadttheaters nicht größer als  $15^\circ$  sein. Berechnen Sie den Winkel  $\alpha$  der beiden Ebenen zueinander und überprüfen Sie ob die Forderung eingehalten wird.

- 5.7** Das Podest soll mit einem Linoleumboden belegt werden. Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen gerundet, wie viel Quadratmeter Linoleumboden benötigt werden.

- 5.8** Um das Bühnenbild noch zu vervollständigen, wird eine große Leinwand, welche die Ebene  $E_3$  beschreibt, auf dem Podest angebracht. Die Leinwand liegt parallel zur  $x_2$ - $x_3$ -Ebene und hat einen Abstand zu dieser von 7 m in negativer  $x_1$ -Richtung (vgl. Skizze oben). Der Bühnenbauer möchte zur genaueren Montage der Leinwand eine Gerade  $r$  auf dem Podest markieren. Berechnen Sie hierfür die Gleichung der Schnittgeraden  $r$  der Ebene  $E_2$  und  $E_3$  in Parameterform.