

Abschlussprüfung Telekolleg

Lehrgang 20

Prüfungsfach: **Mathematik**

Prüfungstag: **Samstag, 27. Juni 2020**

Prüfungsdauer: **180 Minuten**

Hilfsmittel: **Elektronischer, nicht programmierbarer
Taschenrechner;
Formelsammlung**

Name des Prüflings:

Maximale Punktzahl: 100

Erreichte Punktzahl:

Note:

Bewertungsschlüssel:

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

Aufgabe I

BE

1.0 Gegeben ist die Schar reeller Funktionen:

$$f_a: x \mapsto \frac{1}{4}(x^3 - ax^2 - 2ax + 8) \text{ mit } D_{f_a} = \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}.$$

Die Graphen der Funktionen f_a werden in einem kartesischen Koordinatensystem mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Weisen Sie nach, dass $x = -2$ für alle Funktionen f_a eine Nullstelle ist.

2

1.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $a = 2$

Die zugehörige Funktionsgleichung lautet: $f_2(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

Ein Nachweis ist nicht erforderlich.

Die Funktion f_2 wird mit f und ihr Graph mit G_f bezeichnet.

1.2.1 Bestimmen Sie die weitere Nullstelle von f .

6

Geben Sie sämtliche Nullstellen von f mit ihren Vielfachheiten an.

1.2.2 Geben Sie den Funktionsterm $f(x)$ in faktorisierte Form an.

2

1.2.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .

7

1.2.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t im Wendepunkt W an G_f .

5

[Teilergebnis: $W\left(\frac{2}{3} \mid f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$]

1.2.5 Der Graph G_p einer quadratischen Funktion p mit dem Scheitelpunkt $S(0 \mid 1)$

4

schneidet die x -Achse bei $x = -2$.

Ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm $p(x)$.

[Mögliches Ergebnis: $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$]

1.2.6 Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte die Graphen G_f und G_p im Bereich $-3 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

6

[Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ cm}$]

1.2.7 Die Graphen G_f und G_p schließen im II. Quadranten mit der y -Achse ein endliches Flächenstück ein.

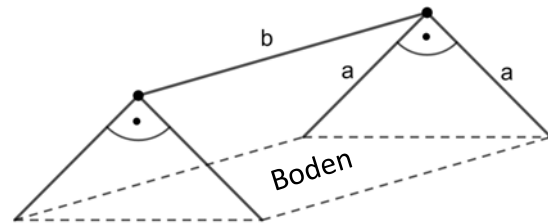
5

Schraffieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe I (Fortsetzung)**BE**

- 2.0** Für das Zeltlager einer Jugendgruppe soll eine einfache, kostengünstige Unterstellmöglichkeit für Gepäck und Vorräte geschaffen werden. Dazu wird ein Gestänge benötigt, an dem man eine bis zum Boden reichende Plane befestigen kann (vgl. Abbildung rechts).



Um störende senkrechte Aufstellstangen in der Mitte zu vermeiden, sollen vorne und hinten jeweils zwei Stangen der Länge a rechtwinklig zusammengesteckt werden. Oben soll eine waagrechte Firststange der Länge b für Stabilität sorgen. Das Geld reicht für insgesamt 12 m Stangenmaterial geeigneter Qualität, das in Stücken gewünschter Länge bestellt werden kann. Planenmaterial steht durch eine Spende in ausreichender Menge zur Verfügung.

Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.

- 2.1** Stellen Sie das Volumen V unter der Plane in Abhängigkeit von der Länge a dar und geben Sie eine mathematisch sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion V an. Gehen Sie davon aus, dass das komplette Stangenmaterial verbaut wird. (Teilergebnis: $V(a) = -2a^3 + 6a^2$)
- 2.2** Unter der Plane soll das größtmögliche Volumen erreicht werden. Berechnen Sie für dieses Volumen die Längen der seitlichen Stangen und der Firststange.

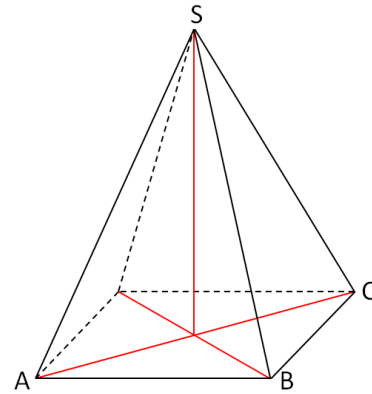
7

6

Aufgabe II

BE

- 1.0** Die Punkte $A(4|2|5)$, $B(6|0|6)$ und $C(7|2|8)$ sind Eckpunkte der quadratischen Grundfläche und $S(1,5|0|10,5)$ die Spitze einer geraden vierseitigen Pyramide in einem kartesischen Koordinatensystem (siehe Skizze).



- 1.1** Bestimmen Sie die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes D und berechnen Sie die Maßzahl des Pyramidenvolumens. 5
- 1.2** Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC in B rechtwinklig ist. 2
- 1.3.0** Die Punkte A, B und S legen eine Ebene E fest.
- 1.3.1** Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform. 5
[Mögliches Teilergebnis: $E: x_1 + 1,5x_2 + x_3 - 12 = 0$]
- 1.3.2** Untersuchen Sie, für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ der Punkt $T(2k|k^2|-4)$ in der Ebene E liegt. 4

- 2.0** Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Weiterhin legen die Punkte $P(1|0|1)$ und $Q(2|1|-1)$ die Gerade h fest.

- 2.1** Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h in Parameterform. 2
- 2.2** Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und h und ermitteln Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S. 4
- 2.3** Berechnen Sie den Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Geraden g und h. Runden Sie Ihr Ergebnis auf eine Nachkommastelle. 3

Aufgabe III**BE**

1.0	<p>Zu Beginn eines neuen Telekolleg-Lehrgangs werden die Kollegiatinnen und Kollegiaten einer Kollegtaggruppe nach ihrem Alter befragt.</p> <p>Die Angaben werden nacheinander notiert:</p> <p style="text-align: center;">23; 21; 20; 21; 29; 22; 21; 22; 20; 23; 21; 22</p>	
1.1	Erstellen Sie eine Rangwertliste und bestimmen Sie Spannweite, Median und Modalwert der Datenreihe.	4
1.2	Ermitteln Sie die relativen Häufigkeiten der Altersverteilung und stellen Sie diese in einem Säulendiagramm graphisch dar.	4
1.3.0	<p>Von allen Kollegiatinnen und Kollegiaten des Telekolleg-Lehrgangs sind $\frac{2}{3}$ Männer, von denen wiederum 75 % das Auto (A) als bevorzugtes Verkehrsmittel für den Weg zur Kolleg-Schule wählen. Von den Frauen kommt nur die Hälfte mit ihrem Pkw in die Schule. Aufgrund der Nähe zur Schule entscheiden sich 25 % aller Kollegiatinnen und Kollegiaten für das Fahrrad (R). Als weitere Alternative steht der Bus (B) zur Verfügung, der allerdings für keinen der männlichen Kollegiaten in Frage kommt.</p> <p>Die Wahl des Verkehrsmittels wird als Zufallsexperiment aufgefasst.</p> <p>Relative Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.</p>	
1.3.1	Bestimmen Sie mithilfe eines vollständigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller sechs Elementarereignisse.	5
1.3.2	<p>Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis</p> <p>E_1 : „Eine Kollegiatin/ein Kollegiat entscheidet sich gegen öffentliche Verkehrsmittel.“</p>	2
1.4	<p>Um die öffentlichen Verkehrsmittel attraktiver zu gestalten, hat man sich in den letzten Monaten bei der Deutschen Bahn darum bemüht, die Gründe für Verspätungen zu reduzieren. Eine nicht repräsentative Untersuchung auf einer bestimmten Bahnstrecke hat ergeben, dass nur noch 5 % aller Züge verspätet sind. Dieser Wert soll als Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden.</p> <p>Im Folgenden werden 20 Bahnfahrten betrachtet.</p> <p>Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:</p> <p>E_2 : „Genau vier Züge kommen verspätet an.“</p> <p>E_3 : „Mindestens ein Zug hat Verspätung.“</p> <p>Runden Sie die Ergebnisse auf vier Nachkommastellen.</p>	3

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe III (Fortsetzung)**BE**

- 2.0** Im Telekolleg wiederholen (W) erfahrungsgemäß 10% der angemeldeten Prüflinge eines Lehrgangs die Abschlussprüfung. Von diesen 10% treten 12% von der Prüfung zurück (Z). Insgesamt treten 82% aller angemeldeten Prüflinge zur Prüfung an.
- 2.1** Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob die Ereignisse W und Z stochastisch unabhängig sind.
- 2.2** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Prüfling, der nicht wiederholt, von der Prüfung zurücktritt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Prozent, auf eine Nachkommastelle gerundet, an.

5

2

25