FOSBOS

Abiturprüfung 2021

zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 15. Juni 2021, 09:00 Uhr – 10:00 Uhr

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

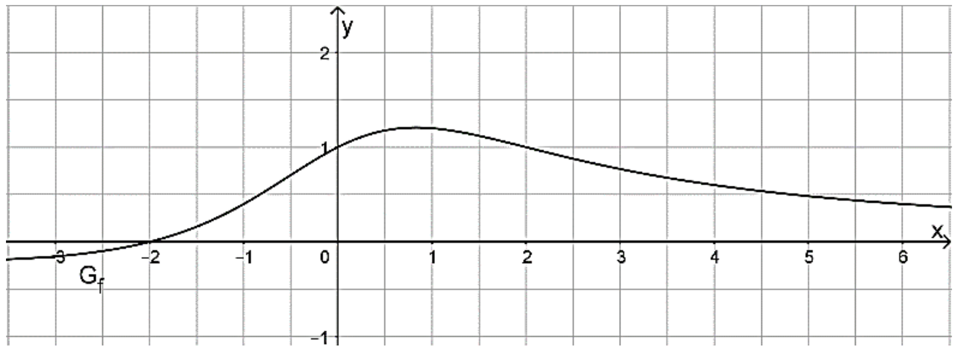
Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE		
6	**1**	Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{(x+2)(x-2)}{-x(x-2)}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet. Geben Sie D_g sowie die Art der Definitionslücken von g an und untersuchen Sie g auf Nullstellen. Geben Sie auch jeweils die Art und die Gleichung aller Asymptoten von G_g an.
	2.0	In der untenstehenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen G_f einer gebrochen-rationalen Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ dargestellt. G_f besitzt den absoluten Hochpunkt $H\left(0{,}8 \mid f(0{,}8)\right)$, ist im Intervall $[0{,}8; +\infty[$ streng monoton fallend und besitzt die x-Achse als waagrechte Asymptote. Für die Funktion h gilt: $h(x) = \ln\left(f(x)\right)$. Die maximale Definitionsmenge der Funktion h ist $D_h =]-2; +\infty[$.



3	**2.1**	Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von h an den Rändern von D_h an.
2	**2.2**	Geben Sie mithilfe der Abbildung die Nullstellen der Funktion h an. Die abzulesenden Werte sind ganzzahlig.
3	**2.3**	Begründen Sie, dass der Graph der Funktion h genau einen Extrempunkt hat und geben Sie die Art sowie die x-Koordinate dieses Extrempunktes an.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
4	**3**	Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto \frac{x+1}{e^x - 1}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entscheiden Sie begründet, welche der folgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. a) Der Graph der Funktion k hat eine senkrechte Asymptote. b) $x \to -\infty \;\Rightarrow\; k(x) \to -1$
4	**4**	Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - 2x + 5 \right) dx \, .$$
22		

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des IR³ sind die Ebene $E: -x_2 + x_3 = 5$ und der Punkt $P(4\|-2\|4)$ gegeben.
5	**1.1**	Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt. Geben Sie eine Gleichung der Geraden g durch den Punkt P an, die zur Ebene E senkrecht steht, und bestimmen Sie den Schnittpunkt L von g und E. [Mögliches Teilergebnis: $L(4\|-1{,}5\|3{,}5)$]
3	**1.2**	Für den Punkt Q gilt: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL}$ Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q. Fertigen Sie ohne Verwendung eines Koordinatensystems eine Skizze an, aus der die gegenseitige Lage der Punkte Q, P und der Ebene E hervorgeht.
4	**2**	Im IR³ sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, und begründen Sie ohne Rechnung, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis des IR³ bilden. Überprüfen Sie auch, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.
12		

FOSBOS

Abiturprüfung 2021

zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 15. Juni 2021, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Lineare Algebra und analytische Geometrie* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE		
	1.0	Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{6x+12}{x^2+4x+6}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der zugehörige Graph wird mit G_f bezeichnet.
5	**1.1**	Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f sowie die Gleichung der Asymptote von G_f. Begründen Sie, ob sich G_f für $x \to -\infty$ von oben bzw. von unten an seine Asymptote annähert.
7	**1.2**	Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f. Runden Sie die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{-6x^2-24x-12}{\left(x^2+4x+6\right)^2}$]
4	**1.3**	Gegeben ist die zweite Ableitungsfunktion f'' durch die Gleichung $f''(x) = \dfrac{12(x+2)\left[x-\left(-2-\sqrt{6}\right)\right]\left[x-\left(-2+\sqrt{6}\right)\right]}{\left(x^2+4x+6\right)^3}$ mit der Definitionsmenge $D_{f''} = \mathbb{R}$ (Nachweis nicht erforderlich!). Begründen Sie, dass die Funktion f drei Wendestellen besitzt. Lesen Sie die x-Koordinaten der Wendepunkte von G_f ab und geben Sie diese an. Bestimmen Sie die y-Koordinaten auf zwei Nachkommastellen gerundet.
5	**1.4**	Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-9 \le x \le 5$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem.
5	**1.5**	Gegeben ist die Funktion $F: x \mapsto 3\ln\left(x^2+4x+6\right)$ mit der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist. Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
	2.0	Die Anzahl der in Deutschland pro Monat verschickten SMS soll näherungsweise durch die Funktion S mit der Gleichung $S(t)=\dfrac{a}{1{,}56e^{bt}-1}$ mit $t\in IR_0^+$ und $a,b\in IR$ modelliert werden. Dabei gibt t die Zeit ab Anfang 2013 ($t=0$) in Monaten an und S(t) die Anzahl der zum Zeitpunkt t gesendeten SMS in Milliarden Stück pro Monat. Bei Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.
4	**2.1**	Aus statistischen Daten ergeben sich die Werte $S(0)=3{,}80$ und $S(12)=2{,}45$. Bestimmen Sie mithilfe der beiden Angaben die Werte der Parameter a und b. [Mögliche Ergebnisse: $a\approx 2{,}13$; $b\approx 0{,}015$]
2	**2.2**	Ermitteln Sie die Anzahl der pro Monat gesendeten SMS, die sich nach diesem Modell langfristig einstellen wird.
4	**2.3**	Zeigen Sie rechnerisch, dass nach diesem Modell die Anzahl der versendeten SMS pro Monat seit Januar 2013 stets gesunken ist.
4	**2.4**	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion S für $0\le t\le 100$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie auf beiden Achsen einen geeigneten Maßstab.
3	**2.5**	Es gilt für den Wert des bestimmten Integrals: $\int_0^{84} S(t)\,dt\approx 116{,}98$ (Nachweis nicht erforderlich!). Die folgende Tabelle gibt die gesamte Anzahl der in Deutschland in den einzelnen Kalenderjahren 2013 bis 2019 verschickten SMS in Milliarden an (Quelle: Bundesnetzagentur).

Kalenderjahr	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
SMS in Mrd.	37,9	22,3	16,6	12,7	10,3	8,9	7,9

Interpretieren Sie den Wert des angegebenen Integrals und überprüfen Sie die Realitätsnähe des Modells mithilfe der von der Bundesnetzagentur veröffentlichten Zahlen.

43

BE		
	1.0	Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{-x^2 - x - 1}{x}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
4	**1.1**	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f bei links- und rechtsseitiger Annäherung an die Definitionslücke x = 0 und ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f.
2	**1.2**	Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen besitzt.
7	**1.3**	Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie die Art und Koordinaten aller Extrempunkte von G_f. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$]
4	**1.4**	Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte sowie alle Asymptoten für $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
	1.5.0	Es wird nun die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x))$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$ betrachtet. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet. Zur Beantwortung der folgenden Teilaufgaben können die Ergebnisse aus vorherigen Aufgaben verwendet werden.
3	**1.5.1**	Geben Sie D_g an und bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion g.
6	**1.5.2**	Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunkts von G_g und zeichnen Sie G_g in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.4.

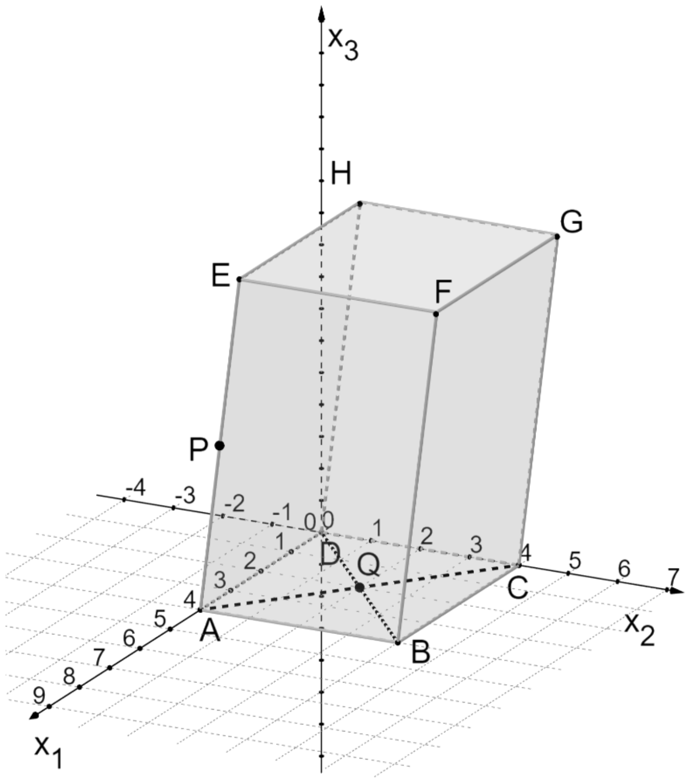
Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
	2.0	In einem Freizeitbad wird eine schnell wachsende Bambusart gepflanzt, die als Sichtschutz dienen soll. Die Modellfunktion B mit der Gleichung $B(t)=\frac{A}{2+98e^{ct}}$ und $t\in IR_0^+$ sowie $A, c\in IR$ beschreibt näherungsweise die Höhe der Bambuspflanzen in Zentimeter. Dabei gibt t die Zeit nach der Pflanzung in Tagen an. Die Pflanzung findet zum Zeitpunkt t = 0 statt. Bei Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle.
4	**2.1**	Ermitteln Sie die Werte der Parameter A und c, wenn die Bambushöhe am Pflanztag 4 cm beträgt und der Bambus 20 Tage nach der Pflanzung bereits 1 m hoch ist. $\left[\text{Mögliche Ergebnisse: } A=400;\ c\approx -0{,}2\right]$
3	**2.2**	Um einen ausreichenden Sichtschutz der Badegäste zu gewährleisten, müssen die Bambuspflanzen mindestens 170 cm hoch sein. Ermitteln Sie, am wievielten Tag nach der Pflanzung die Bambuspflanzen eine Höhe von 170 cm erreichen.
2	**2.3**	Bestimmen Sie, welche Höhe die Bambuspflanzen nach langer Zeit erreichen.
4	**2.4**	Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion B.
4	**2.5**	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion B für $t\in[0;80]$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie auf beiden Achsen einen geeigneten Maßstab.
43		

BE

1.0 Ein Holzklotz in Form eines Spats ABCDEFGH mit quadratischer Grundfläche soll bearbeitet werden. Er ist in einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 modellhaft so dargestellt, dass die Seiten $\overline{DA}$ sowie $\overline{DC}$ auf der x_1 - bzw. x_2 -Achse liegen und D im Koordinatenursprung liegt. Die Seite $\overline{AE}$ wird halbiert vom Punkt $P(5|1|3)$. Der Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche ABCD ist $Q(2|2|0)$.

Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Dezimeter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

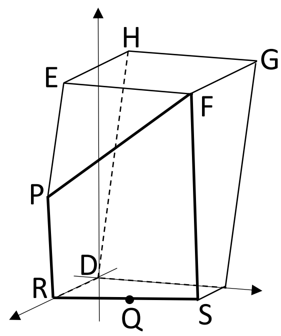


4 **1.1** Lesen Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C aus der Zeichnung ab. Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes E.

6 **1.2** Die Punkte P, Q und $F(6|6|6)$ legen die Ebene K fest. Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung von K in Parameter- und Koordinatenform.
[Mögliches Ergebnis: $K: 9x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 24 = 0$]

4 **1.3** Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Gerade DF auf die Ebene K trifft.

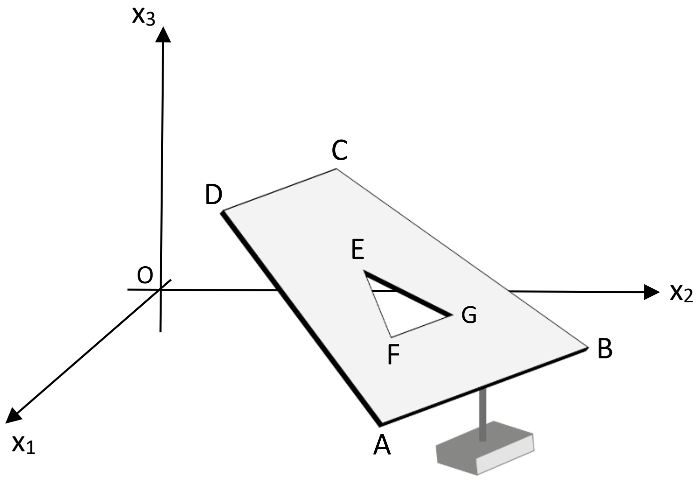
5 **1.4** Der Holzklotz wird entlang der Ebene K durchtrennt und der vordere Teil weggenommen. Dadurch ergibt sich in der Grundfläche ABCD eine Schnittkante, die die Kante $\overline{DA}$ im Punkt R sowie die Kante $\overline{CB}$ im Punkt S schneidet. Die Schnittfläche wird durch die Punkte P, R, S und F begrenzt (siehe Skizze).
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte R und S.



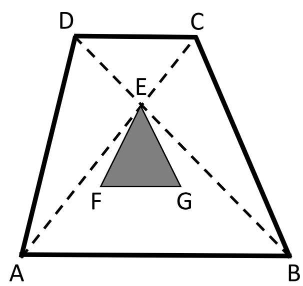
4 **1.5** Erläutern Sie, wie Sie den Inhalt der Fläche PRSF berechnen können, ohne diese Rechnung konkret durchzuführen.

23

BE		
	1.0	Eine Skulptur aus Leichtmetall in einer Kunsthalle hat die Form eines nicht symmetrischen Trapezes ABCD, aus dem ein Dreieck EFG ausgeschnitten wurde. Das Trapez wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Der Hallenboden liegt in der x_1-x_2-Koordinatenebene und der Punkt O im Koordinatenursprung. Die Punkte $A(7\|7\|2)$, $B(3\|10\|2)$, $C(1\|4\|5)$ und $D(3\|2{,}5\|5)$ bilden die Eckpunkte des Trapezes. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Dezimeter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.



6	**1.1**	Die Punkte A, B und C legen die Ebene K fest. Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung von K in Parameter- und Koordinatenform. [Mögliches Teilergebnis: $K: 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 69$]
3	**1.2**	Berechnen Sie den Neigungswinkel der Trapezfläche ABCD gegenüber dem Hallenboden. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.
4	**1.3**	Erläutern Sie, wie Sie den Inhalt der Trapezfläche ABCD berechnen können, ohne diese Rechnung konkret durchzuführen. Hinweis: Die ausgeschnittene Dreiecksfläche EFG ist bei der Erläuterung nicht zu berücksichtigen.
5	**1.4**	Der Punkt E ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ (siehe nebenstehende Skizze). Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes E. [Mögliches Ergebnis: $E(3\|5\|4)$]



5	**1.5**	Für den Punkt F des Dreiecks EFG gilt: $F(4{,}4\|5{,}2\|3{,}5)$. Berechnen Sie die Maßzahl der Länge der Dreiecksseite $\overline{EF}$ und die Koordinaten des Punktes G, wenn die Dreiecksseite $\overline{FG}$ parallel zu $\overline{AB}$ ist und $\left\|\overline{EF}\right\| = \left\|\overline{FG}\right\|$ gilt.
23		