FOSBOS

Abiturprüfung 2021

zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 15. Juni 2021, 09:00 Uhr – 10:00 Uhr

Mathematik

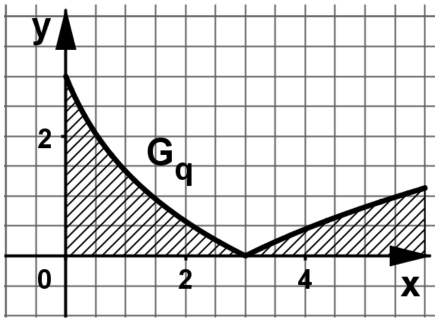
Ausbildungsrichtung Technik

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE		
3	**1**	In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion q mit der Definitionsmenge $D_q = [0;6]$ zu sehen. Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von q und der x-Achse soll mithilfe der Streifenmethode näherungsweise berechnet werden. Ermitteln Sie die Obersumme O_4 für die schraffierte Fläche auf eine Nachkommstelle genau, und zwar bei einer Überdeckung mit 4 Rechtecken gleicher Breite. Entnehmen Sie benötigte Werte der Abbildung.
		
	2.0	Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 2 \cdot \arctan(3 - 5x - 2x^2)$ und der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
4	**2.1**	Ermitteln Sie die Nullstellen von f und bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen von f.
5	**2.2**	Ermitteln Sie die x-Koordinate und die Art des Extrempunkts des Graphen von f.
	3.0	Nun wird die Funktion $h: x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{1-e^x}$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ betrachtet.
3	**3.1**	Untersuchen Sie, ob der Graph von h punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
4	**3.2**	Zeigen Sie, dass gilt: $1 + \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{1}{1-e^x}$, und geben Sie eine Stammfunktion von h an.
3	**3.3**	Die Funktion h ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von h.
22		

BE

3 **1** Die sechs Seiten eines Laplace-Würfels sind mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 beschriftet. Dieser Würfel wird zweimal hintereinander geworfen.

Betrachtet wird folgendes Ereignis E.

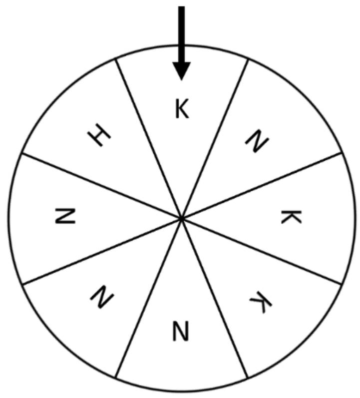
E : „Die Summe der beiden gewürfelten Augenzahlen ist höchstens drei.“

Geben Sie E in aufzählender Mengenschreibweise an und ermitteln Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

4 **2** Für zwei gegebene Ereignisse A und B gilt: $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = 0$ und $P(A \cup B) = \frac{4}{9}$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$, z. B. mithilfe einer Vierfeldertafel.

3.0 Bei einem Gewinnspiel wird nebenstehendes Glücksrad gedreht, bei dem die einzelnen Kreissektoren gleich groß sind. Diesem Zufallsexperiment wird der Ergebnisraum $\Omega = \{H; K; N\}$ zugrunde gelegt. Dabei steht H für den Hauptgewinn, K für einen Kleingewinn und N für eine Niete.



2 **3.1** Vier Personen drehen jeweils einmal am Glücksrad.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keiner von ihnen eine Niete erzielt.

3 **3.2** Für einen Einsatz von 2 € darf man einmal am Glücksrad drehen. Für einen Hauptgewinn erhält der Teilnehmer 7 € und für einen Kleingewinn 3 € ausbezahlt. Bei einer Niete verfällt der Einsatz.

Berechnen Sie den Erwartungswert für die Zufallsgröße X: „Auszahlung in Euro“ und interpretieren Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit dem Einsatz.

12

FOSBOS

Abiturprüfung 2021

zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 15. Juni 2021, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

Mathematik

Ausbildungsrichtung Technik - CAS

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 3 \cdot \ln\left(\dfrac{x^2-4x+4}{4x-14}\right)$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

4 **1.1** Ermitteln Sie D_f und untersuchen Sie, ob G_f die x-Achse schneidet.

3 **1.2** Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to 3{,}5$ und für $x \to +\infty$ und geben Sie Art und Gleichung der Asymptote von G_f an.

7 **1.3** Ermitteln Sie **ohne CAS** die Art und die Koordinaten des Extrempunkts von G_f und geben Sie die Wertemenge von f an.
[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = 3 \cdot \dfrac{x-5}{(x-2)\cdot(x-3{,}5)}$]

1.4.0 Der Graph der Funktion w mit der Definitionsmenge $D_w = \mathbb{R}$ ist eine Wendetangente des Graphen von f.

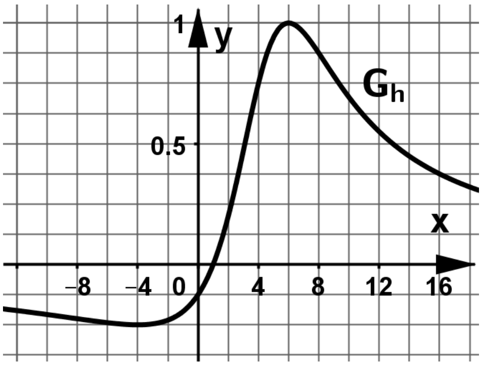
4 **1.4.1** Ermitteln Sie eine Gleichung von w. Runden Sie die in dieser Gleichung vorkommenden Werte auf zwei Nachkommastellen.

2 **1.4.2** Auf zwei Nachkommastellen gerundet gilt: $\int_5^{11{,}43} \left(f(x) - w(x)\right) dx \approx 0$ (Nachweis ist nicht erforderlich)**.** Erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieser Aussage.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.0 Gegeben sind die Funktionen $h: x \mapsto \dfrac{4x-4}{(x-4)^2+16}$ und $H: x \mapsto \int\limits_0^x h(t)\,dt$ mit den Definitionsmengen $D_h = \mathbb{R}$ und $D_H = \mathbb{R}$. Ihre Graphen werden mit G_h bzw. G_H bezeichnet. Ein Ausschnitt von G_h ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen.



5 **2.1** Geben Sie das Steigungsverhalten und das Krümmungsverhalten von G_H an.

8 **2.2** Gegeben ist nun zusätzlich der Punkt $P\left(1\,|\,H(1)\right)$. Geben Sie zunächst ohne weitere Berechnungen die Bedeutung von P für den Graphen von H an.

Berechnen Sie anschließend **ohne CAS** (z. B. mithilfe einer geeigneten Substitution) die y-Koordinate des Punkts P auf 3 Nachkommastellen genau.

3.0 In einem zylindrischen Gefäß befinden sich 240 Liter Wasser, in dem zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bestimmte Menge Salz der Masse m_0 gelöst ist. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wird dem Gefäß zusätzliches Salzwasser mit konstanter Salzkonzentration gleichmäßig zugeführt und dort gründlich verrührt, während ebenso gleichmäßig ein Teil des durchmischten Salzwassers aus dem Gefäß abfließt. Dabei ist die in gleichen Zeitintervallen zugeflossene Flüssigkeitsmenge stets genauso groß wie die abgeflossene Flüssigkeitsmenge.

Die Masse des Salzes, welches zu einem bestimmten Zeitpunkt t im Gefäß im Wasser gelöst ist, wird durch die Funktion $m: t \mapsto m(t)$ beschrieben. Dabei wird t in Minuten und $m(t)$ in kg angegeben. Die zeitliche Entwicklung der Masse $m(t)$ des gelösten Salzes wird für $t \geq 0$ durch die folgende Differenzialgleichung beschrieben: $\dot{m}(t) + \frac{1}{120} \cdot m(t) = \frac{1}{5}$.
Auf das Mitführen der Einheiten kann bei nachfolgenden Berechnungen verzichtet werden.

7 **3.1** Weisen Sie **ohne CAS** nach, dass die Funktion m_D mit $m_D(t) = D \cdot e^{-\frac{1}{120} \cdot t} + 24$ für beliebige Werte von $D \in \mathbb{R}$ eine Lösung der obigen Differenzialgleichung ist. Berechnen Sie außerdem, wieviel Salz zum Zeitpunkt $t = 0$ in dem Gefäß im Wasser gelöst sein muss, wenn es $48{,}6$ Minuten dauert, bis in dem Gefäß im Wasser $12{,}0$ kg Salz gelöst sind.

3 **3.2** Begründen Sie, warum für $t \to +\infty$ der Wert von $\dot{m}(t)$ gegen 0 geht. Untersuchen Sie außerdem das Verhalten von $m(t)$ für $t \to +\infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto (x+2) \cdot e^{-x}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph dieser Funktion wird mit G_f bezeichnet.

3 **1.1** Geben Sie die Nullstelle von f, sowie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ an.

5 **1.2** Der Graph von f schließt zusammen mit den beiden Koordinatenachsen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Ermitteln Sie **ohne CAS** die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

1.3.0 Durch Einschränkung der Definitionsmenge von f entsteht die umkehrbare Funktion g mit der Gleichung $g(x) = f(x)$ und der größtmöglichen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Auf dem Graphen von g liegt der Punkt $P(1 \mid \frac{3}{e})$.

4 **1.3.1** Ermitteln Sie die Definitionsmenge D_g.

[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = -(x+1) \cdot e^{-x}$]

4 **1.3.2** Die Umkehrfunktion von g wird mit g^{-1} bezeichnet. Bestimmen Sie die Nullstelle von g^{-1}. Berechnen Sie außerdem die Steigung der Geraden, die den Graphen von g^{-1} im Punkt $Q(\frac{3}{e} \mid y_Q)$ berührt.

2.0 Gegeben ist die Funktion $r: x \mapsto \ln\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)$ mit der größtmöglichen Definitionsmenge $D_r \subseteq \mathbb{R}$.

2 **2.1** Bestimmen Sie die Definitionsmenge von r.

6 **2.2** Untersuchen Sie **ohne CAS** das Monotonieverhalten des Graphen von r.

[Mögliches Teilergebnis: $r'(x) = -\frac{8}{x \cdot (x^2-4)}$]

5 **2.3** Ermitteln Sie **ohne CAS** eine integralfreie Darstellung aller Stammfunktionen von r für $x > 2$.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
4	**2.4**	Begründen Sie für die folgenden Aussagen jeweils, warum sie falsch sind. A: „Der Graph von r ist symmetrisch zur y-Achse und schneidet die x-Achse genau zweimal.“ B: „Der Graph der Funktion $R: x \mapsto \int_8^x r(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_R =]2;+\infty[$ ist linksgekrümmt.“
3	**2.5**	Ermitteln Sie den Term einer Funktion q, so dass für $x > 2$ gilt: $q\big(r(x)\big) = x$.
	3.0	Gegeben ist die Differenzialgleichung $x \cdot y' = y - \dfrac{x^2}{(x-1)^2+1}$ für $x > 1$.
2	**3.1**	Die Funktion ℓ ist diejenige Lösung der Differenzialgleichung, deren Graph durch den Punkt $P(2\|2)$ verläuft. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung stichhaltig: **„**Der Graph von ℓ hat im Punkt P eine waagrechte Tangente.“
5	**3.2**	Überprüfen Sie **ohne CAS**, ob die Funktion $h: x \mapsto x \cdot \arctan\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_h =]1;+\infty[$ eine Lösung der Differenzialgleichung ist.
43		

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Der Betreiber eines Freizeitparks befragt eine große Anzahl seiner Besucher. Dabei interessiert ihn, ob diese aus der Region (R) kommen, ob es sich entweder um Tageskarteninhaber (T) oder Dauerkarteninhaber (D) handelt und ob sie mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot (Z), wie z. B. das 4D-Kino, in Anspruch nehmen.

Bei $80\,\%$ der Befragten handelt es sich um Besucher, die nicht aus der Region stammen. Drei Viertel der Befragten aus der Region besitzen eine Dauerkarte. Nicht aus der Region stammende Befragte betreten den Park zu $90\,\%$ mit einer Tageskarte. Unabhängig davon, ob Befragte mit Tageskarte aus der Region kommen oder nicht, nehmen sie zu $60\,\%$ mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot in Anspruch. Unter den Befragten mit Dauerkarte aus der Region nutzen nur $10\,\%$ mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot. Der Anteil der Befragten, die nicht aus der Region kommen, eine Dauerkarte kaufen und mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot nutzen, beträgt $4\,\%$.

Das Ergebnis der Befragung eines zufällig ausgewählten Besuchers wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

6 **1.1** Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse.

[Teilergebnis: $P\left(\left\{\left(\overline{R};D;Z\right)\right\}\right)=0{,}04$]

7 **1.2** Gegeben sind die folgenden Ereignisse:

E_1 : „Ein zufällig ausgewählter Besucher kommt aus der Region oder besitzt eine Tageskarte.“

$E_2=\left\{\left(R;T;Z\right);\ \left(R;D;Z\right);\ \left(\overline{R};T;Z\right);\ \left(\overline{R};D;Z\right)\right\}$

$E_3=\overline{E_1\cup E_2}$

a) Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit.

b) Fassen Sie E_3 im Sachzusammenhang möglichst einfach in Worte.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.0 Dem Freizeitpark ist ein Campingplatz angegliedert, auf dem die Parkbesucher übernachten können. Nach Angaben des Betreibers nutzen $15\,\%$ aller Parkbesucher diese Übernachtungsmöglichkeit (C). $60\,\%$ aller Besucher kommen in den Schulferien (F) in den Freizeitpark. Von diesen nutzen $20\,\%$ das Übernachtungsangebot.

4 **2.1** Ermitteln Sie unter Verwendung einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Parkbesucher den Park außerhalb der Ferien besucht und die angegliederte Übernachtungsmöglichkeit in Anspruch nimmt.

6 **2.2** An einem bestimmten Tag besuchen 200 Familien den Park. Insgesamt stehen 50 Campingstellplätze zur Verfügung. Eine Familie benötigt jeweils genau einen Stellplatz. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Familie auf dem Campingplatz übernachten möchte, beträgt erfahrungsgemäß $25\,\%$.

Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) die Anzahl der Campingstellplätze an diesem Tag nicht ausreicht.

b) die Anzahl der benötigten Campingstellplätze innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Schreiner hat sich auf die Herstellung maßangefertigter Möbel spezialisiert. Er fertigt seine Möbel aus Fichten- oder Buchenholz und bietet sie mit gewachster (G) oder lackierter (L) Oberfläche an.

Erfahrungsgemäß entscheiden sich $40\,\%$ seiner Kunden für Möbel aus Fichtenholz (F). Jeder dritte Kunde, der Möbel aus Fichtenholz in Auftrag gibt, bestellt diese mit lackierter Oberfläche. Unter den Kunden, die sich für die Holzart Buche (B) entscheiden, beträgt der Anteil derer, die ihre Möbel mit gewachster Oberfläche bestellen, $75\,\%$.

4 **1.1** Berechnen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms den prozentualen Anteil von gewachsten Möbeln am Verkauf.

2 **1.2** Berechnen Sie $P(B \cup G)$.

2.0 Für eine Zufallsgröße X ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $a, b \in \mathbb{R}$ durch folgende Tabelle vollständig gegeben:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	a	$b - a$	0,2	b	0,08	0,02

4 **2.1** Bestimmen Sie die Werte für die Parameter a und b, wenn $E(X) = 3{,}12$ gilt.

[Teilergebnis: $a = 0{,}1$]

6 **2.2** Die Lieferzeiten für die Möbel des Schreiners aus 1.0 sind abhängig von verschiedenen Faktoren, wie z. B. Auftragslage und Bestellumfang. Der Schreiner hat sich über Jahre hinweg die Lieferzeiten ab Auftragseingang notiert, um möglichst genaue Angaben zu den Lieferzeiten machen zu können.
Die unter 2.0 aufgeführte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den unter 2.1 bestimmten Werten für a und b beschreibt die Lieferzeiten für die Möbel innerhalb der letzten Jahre. Die Zufallsgröße X gibt die Lieferzeit ab Bestelldatum in vollen Wochen an. Lieferzeiten von mehr als sechs Wochen kamen bisher nicht vor.
Interpretieren Sie den Erwartungswert von X im Sachzusammenhang und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E_1: „Die Lieferzeit beträgt höchstens vier Wochen.“

E_2: „Bei genau drei von neun Bestellungen erfolgt die Lieferung der Möbel innerhalb einer Woche.“

E_3: „Bei zehn nacheinander eingegangenen Bestellungen erfolgt nur bei der letzten die Lieferung der Möbel erst in der sechsten Woche, alle anderen erfolgen früher.“

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3.0 Gegen eine Gebühr liefert der Schreiner die gekauften Möbel an seine Kunden aus. Von insgesamt 200 Kunden stammen 80 aus einem Umkreis von 50 km (U) um den Standort der Schreinerei. 128 Kunden nehmen den Lieferservice nicht in Anspruch ($\overline{L}$).

Um die Auslieferungen besser planen zu können, hat der Schreiner in der folgenden Tabelle die Anzahl der zu beliefernden Kunden (L) – also insgesamt 72 – je nach Bestellumfang und Lieferort dargestellt.

	U	$\overline{U}$
$\leq$ 2 Möbelstücke	7	17
$>$ 2 Möbelstücke	18	30

4 **3.1** Ergänzen Sie die nebenstehende Vierfeldertafel mithilfe der obigen Angaben.

Bestimmen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde mehr als 50 km von der Schreinerei entfernt wohnt und seine Möbel selbst abholt.

	U	$\overline{U}$	Σ
L			
$\overline{L}$			
Σ			200

3 **3.2** Beschreiben Sie mit eigenen Worten jeweils die Bedeutung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_U(\overline{L})$ bzw. $P_{\overline{U}}(\overline{L})$ im Sachzusammenhang (ohne sie zu berechnen) und interpretieren Sie die hier geltende Beziehung $P_U(\overline{L}) > P_{\overline{U}}(\overline{L})$ im Sinne der vorliegenden Thematik.

23