

Fachabiturprüfung 2021
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 15. Juni 2021, 09:00 Uhr – 10:00 Uhr

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

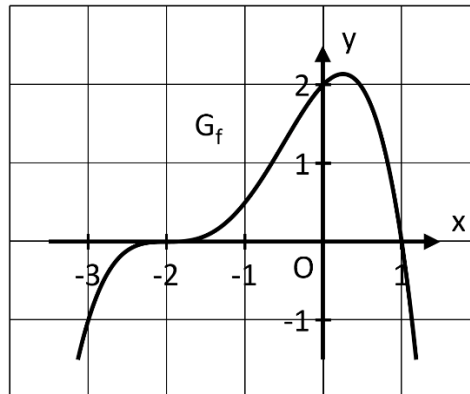
Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

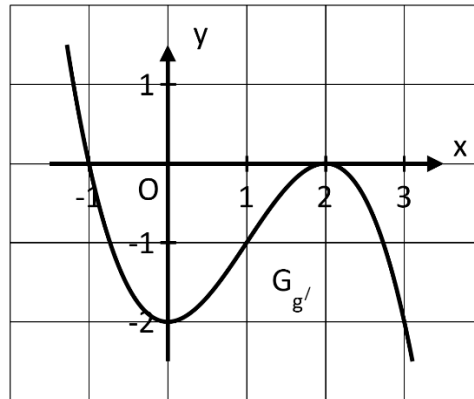


- 1.1** Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f sowie jeweils deren Vielfachheit an. Bestimmen Sie mithilfe dieser Nullstellen eine Funktionsgleichung der Funktion f . Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.
- 1.2** Entscheiden Sie anhand des Graphen G_f , ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.
- a) $f'(0) = -\frac{1}{2}$ b) $f''(1) < 0$
 c) $f''(-2) = f'(-2)$ d) $W_f = \mathbb{R}$
- 1.3** Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{4}(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8)$. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, das der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten des Koordinatensystems einschließt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** g ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen der Ableitungsfunktion g' . Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.



- 2.1** Geben Sie die Stellen an, an welchen der Graph der Funktion g Punkte mit horizontaler Tangente hat und benennen Sie jeweils die Art dieser Graphenpunkte.
- 2.2** Geben Sie mit Begründung die Wendestellen der Funktion g an.
- 3** Gegeben sind Auszüge aus zwei Wertetabellen zu zwei Funktionen h und k mit der Definitionsmenge $D_h = D_k = \mathbb{R}_0^+$. Für die fehlenden Funktionswerte in den folgenden Tabellen gilt $h(x) \geq 0$ und $k(x) \geq 0$.

Tabelle 1

x	0	2	4
$h(x)$	7	5	

Tabelle 2

x	0	2	4
$k(x)$		9	15

Entscheiden Sie begründet, welcher der folgenden Funktionsterme zu Tabelle 1 bzw. zu Tabelle 2 gehört.

A) $8 - 3^{0,5 \cdot x}$

B) $-x + 7$

C) $3^{0,5 \cdot x} + 6$

D) $x + 7$

Geben Sie dann die fehlenden Tabellenwerte an.

22

BE

- 3 1 Die sechs Seiten eines Laplace-Würfels sind mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 beschriftet. Dieser Würfel wird zweimal hintereinander geworfen.

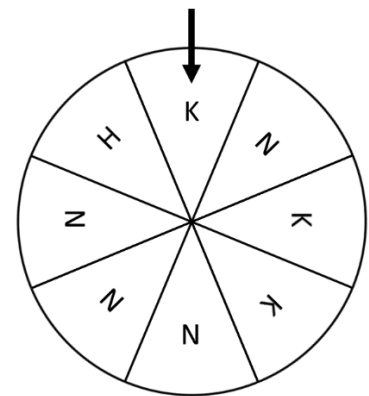
Betrachtet wird folgendes Ereignis E.

E: „Die Summe der beiden gewürfelten Augenzahlen ist höchstens drei.“

Geben Sie E in aufzählender Mengenschreibweise an und ermitteln Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

- 4 2 Für zwei gegebene Ereignisse A und B gilt: $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = 0$ und $P(A \cup B) = \frac{4}{9}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$, z. B. mithilfe einer Vierfeldertafel.

- 3.0 Bei einem Gewinnspiel wird nebenstehendes Glücksrad gedreht, bei dem die einzelnen Kreissektoren gleich groß sind. Diesem Zufallsexperiment wird der Ergebnisraum $\Omega = \{H; K; N\}$ zugrunde gelegt. Dabei steht H für den Hauptgewinn, K für einen Kleingewinn und N für eine Niete.



- 2 3.1 Vier Personen drehen jeweils einmal am Glücksrad. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keiner von ihnen eine Niete erzielt.
- 3 3.2 Für einen Einsatz von 2 € darf man einmal am Glücksrad drehen. Für einen Hauptgewinn erhält der Teilnehmer 7 € und für einen Kleingewinn 3 € ausbezahlt. Bei einer Niete verfällt der Einsatz. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Zufallsgröße X: „Auszahlung in Euro“ und interpretieren Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit dem Einsatz.

12

Fachabiturprüfung 2021
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 15. Juni 2021, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Der Graph G_f einer auf $D_f = \mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vom Grad drei verläuft durch den Punkt $P(-1|0,5)$ und besitzt im Schnittpunkt mit der y -Achse einen Wendepunkt. Für die Wendetangente G_t gilt $t: y = 2x + 1$ mit der Definitionsmenge $D_t = \mathbb{R}$.
- 1.1** Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf.
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -1,5x^3 + 2x + 1$]
- 1.2** Bestimmen Sie jeweils Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f und begründen Sie, warum f nur eine einfache Nullstelle besitzt.
- 1.3** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Tangente G_t im Bereich $-1,5 \leq x \leq 1,5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$
- 1.4** Der Graph G_f , die Tangente G_t und die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Aufgabe 1.3 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.
- 2.0** Der zeitliche Verlauf der Temperatur eines in einer großen Tasse eingeschenkten Frühstückstees wird in einem Schülerexperiment untersucht. Als Grundlage wird näherungsweise die Modellfunktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + 22$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ verwendet. Dabei steht die Variable t für die Beobachtungszeit t in Minuten ab dem Beginn des Experiments, welches mit dem Eingießen des Tees in die Tasse zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ startet. Der jeweilige Funktionswert von T gibt die Temperatur des Tees in $^\circ\text{C}$ zum Zeitpunkt t an. Der Tee in der Tasse hat zu Beginn des Experiments um 8:55 Uhr eine Temperatur von 80°C . Um 9:15 Uhr beträgt die Teetemperatur nur noch 30°C .
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.
- 2.1** Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b . Runden Sie gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle. Erläutern Sie, welche Bedeutung der Wert 22 im Funktionsterm der Funktion T für die Funktionswerte der Modellfunktion hat und bringen Sie diesen Wert in Zusammenhang mit dem durchgeführten Experiment.

Für die folgende Teilaufgabe gilt: $a = 58$; $b = -0,1$
- 2.2** Als angenehm wird eine Trinktemperatur von 54°C empfunden. Berechnen Sie, um welche Uhrzeit diese Temperatur erreicht wird. Runden Sie die Zeitangabe auf ganze Minuten.

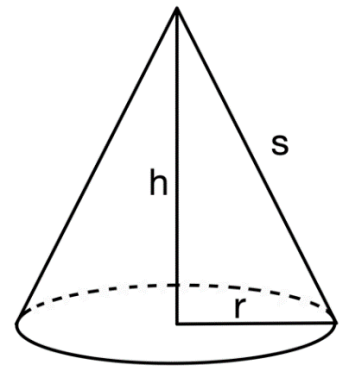
Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 3.0** Ein Tipi Zelt in einem Skigebiet hat die Form eines geraden Kreiskegels, dessen Mantellinie die Länge $s=8\text{ m}$ hat (siehe Zeichnung). Das Zelt besitzt ein Innenvolumen, das bei gleichbleibender Länge der Mantellinie von der Höhe h des Zeltes abhängt. Der jeweilige Funktionswert der Funktion $V:h\mapsto V(h)$ beschreibt dieses Innenvolumen.

Aus optischen Gründen soll dabei die Höhe h des Tipi Zeltes mindestens 4 m und maximal 6 m betragen. Dabei steht h für die Höhe des Zeltes in m und $V(h)$ für das Volumen des Zeltes in m^3 .

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



- 3.1** Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf.

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{64}{3}\pi h$]

- 3.2** Bestimmen Sie unter den oben genannten Vorgaben, für welche Höhe h das Tipi Zelt den maximalen Rauminhalt aufweist. Berechnen Sie für diesen Fall den Durchmesser des Bodens des Tipi Zeltes. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 20x^2 + 64) \text{ mit der Definitionsmenge } D_f = [-3; 4,5]$$

sowie die lineare Funktion $g: y = \frac{15}{4}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

Die Graphen der Funktionen f und g in einem kartesischen Koordinatensystem werden mit G_f bzw. G_g bezeichnet.

2 1.1 Geben Sie an, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

„Der Graph der Funktion f ist auf D_f achsensymmetrisch zur y -Achse.“

5 1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f .

8 1.3 Bestimmen Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte von G_f und geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

5 1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Gerade G_g in ein kartesisches Koordinatensystem.

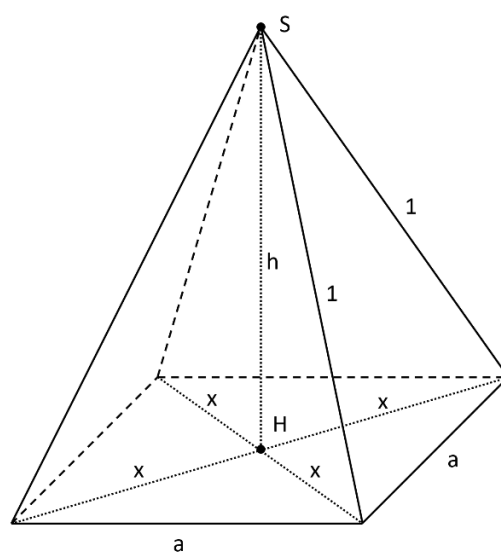
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

4 1.5 Die Graphen der beiden Funktionen f und g schneiden sich an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = \sqrt{19}$ (Nachweis nicht erforderlich) und schließen somit zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des kleineren der beiden Flächenstücke. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

2.0 Als Teilnehmer eines Auswahlverfahrens zur Einstellung von Werkstudenten bei einer großen Molkerei wird Ihnen folgende Aufgabe gestellt: Ein Schokodrink soll in einem Tetra Pak abgefüllt werden, welcher die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat. Die vier Seitenkanten der Pyramide sollen aus verpackungstechnischen Gründen jeweils eine feste Länge von 1 dm haben. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt H , in dem sich die Diagonalen der Grundfläche im rechten Winkel schneiden.

Aus verkaufstechnischen Gründen soll die Höhe des Tetra Paks mindestens 0,4 dm und höchstens 0,6 dm betragen.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 4 **2.1** Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ auf. Dabei steht h für die Höhe der Pyramide in dm und $V(h)$ für das Volumen der Pyramide in dm^3 .
[Mögliches Ergebnis: $V(h) = -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h$]
- 7 **2.2** Bestimmen Sie unter den oben genannten Vorgaben, für welche Höhe h der Tetra Pak den maximalen Rauminhalt aufweist. Berechnen Sie dieses maximale Volumen. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.
- 3.0** 90% einer Rasenfläche sind vermoost. Das Moos soll mit einem umweltverträglichen Mittel zurückgedrängt werden. Die zeitliche Entwicklung der vom Moos bedeckten Rasenfläche wird näherungsweise mittels der Modellfunktion M mit der Funktionsgleichung $M(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beschrieben. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Tagen ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Ausbringung des Mittels. Der jeweilige Funktionswert von M gibt die gesamte mit Moos bedeckte Fläche in m^2 zum Zeitpunkt t an. Bekannt ist, dass zwei Tage nach Ausbringung des Mittels noch 400 m^2 und nach neun Tagen nur noch 140 m^2 vermoost sind.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.
- 5 **3.1** Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b . Runden Sie a ganzzahlig und b auf zwei Nachkommastellen. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Rasenfläche.

Für die folgende Teilaufgabe gilt: $a = 540$; $b = -0,15$
- 3 **3.2** Der Hersteller des umweltverträglichen Mittels wirbt damit, dass die mit Moos bedeckte Fläche nach der Ausbringung innerhalb einer Woche um ca. 65% zurückgehen wird. Überprüfen Sie diese Werbeaussage, indem Sie berechnen, nach wie vielen Tagen diese Reduzierung laut dem Modell aus 3.0 erreicht wird. Runden Sie auf ganze Tage.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Der Betreiber eines Freizeitparks befragt eine große Anzahl seiner Besucher. Dabei interessiert ihn, ob diese aus der Region (R) kommen, ob es sich entweder um Tageskarteninhaber (T) oder Dauerkarteninhaber (D) handelt und ob sie mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot (Z), wie z. B. das 4D-Kino, in Anspruch nehmen.

Bei 80 % der Befragten handelt es sich um Besucher, die nicht aus der Region stammen. Drei Viertel der Befragten aus der Region besitzen eine Dauerkarte. Nicht aus der Region stammende Befragte betreten den Park zu 90 % mit einer Tageskarte. Unabhängig davon, ob Befragte mit Tageskarte aus der Region kommen oder nicht, nehmen sie zu 60 % mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot in Anspruch. Unter den Befragten mit Dauerkarte aus der Region nutzen nur 10 % mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot. Der Anteil der Befragten, die nicht aus der Region kommen, eine Dauerkarte kaufen und mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot nutzen, beträgt 4 %.

Das Ergebnis der Befragung eines zufällig ausgewählten Besuchers wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

- 6 1.1** Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse.

$$[\text{Teilergebnis: } P(\{(\bar{R}; D; Z)\}) = 0,04]$$

- 7 1.2** Gegeben sind die folgenden Ereignisse:

E_1 : „Ein zufällig ausgewählter Besucher kommt aus der Region oder besitzt eine Tageskarte.“

$$E_2 = \{(R; T; Z); (R; D; Z); (\bar{R}; T; Z); (\bar{R}; D; Z)\}$$

$$E_3 = \overline{E_1 \cup E_2}$$

a) Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit.

b) Fassen Sie E_3 im Sachzusammenhang möglichst einfach in Worte.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0 Dem Freizeitpark ist ein Campingplatz angegliedert, auf dem die Parkbesucher übernachten können. Nach Angaben des Betreibers nutzen 15 % aller Parkbesucher diese Übernachtungsmöglichkeit (C). 60 % aller Besucher kommen in den Schulferien (F) in den Freizeitpark. Von diesen nutzen 20 % das Übernachtungsangebot.
- 4 2.1 Ermitteln Sie unter Verwendung einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Parkbesucher den Park außerhalb der Ferien besucht und die angegliederte Übernachtungsmöglichkeit in Anspruch nimmt.
- 6 2.2 An einem bestimmten Tag besuchen 200 Familien den Park. Insgesamt stehen 50 Campingstellplätze zur Verfügung. Eine Familie benötigt jeweils genau einen Stellplatz. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Familie auf dem Campingplatz übernachten möchte, beträgt erfahrungsgemäß 25 %.
- Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- a) die Anzahl der Campingstellplätze an diesem Tag nicht ausreicht.
- b) die Anzahl der benötigten Campingstellplätze innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Ein Schreiner hat sich auf die Herstellung maßangefertigter Möbel spezialisiert. Er fertigt seine Möbel aus Fichten- oder Buchenholz und bietet sie mit gewachster (G) oder lackierter (L) Oberfläche an.

Erfahrungsgemäß entscheiden sich 40 % seiner Kunden für Möbel aus Fichtenholz (F). Jeder dritte Kunde, der Möbel aus Fichtenholz in Auftrag gibt, bestellt diese mit lackierter Oberfläche. Unter den Kunden, die sich für die Holzart Buche (B) entscheiden, beträgt der Anteil derer, die ihre Möbel mit gewachster Oberfläche bestellen, 75 %.

- 4 **1.1** Berechnen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms den prozentualen Anteil von gewachsenen Möbeln am Verkauf.

- 2 **1.2** Berechnen Sie $P(B \cup G)$.

- 2.0** Für eine Zufallsgröße X ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $a, b \in \mathbb{R}$ durch folgende Tabelle vollständig gegeben:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	a	b-a	0,2	b	0,08	0,02

- 4 **2.1** Bestimmen Sie die Werte für die Parameter a und b, wenn $E(X) = 3,12$ gilt.

[Teilergebnis: $a = 0,1$]

- 6 **2.2** Die Lieferzeiten für die Möbel des Schreiners aus 1.0 sind abhängig von verschiedenen Faktoren, wie z. B. Auftragslage und Bestellumfang. Der Schreiner hat sich über Jahre hinweg die Lieferzeiten ab Auftragseingang notiert, um möglichst genaue Angaben zu den Lieferzeiten machen zu können.

Die unter 2.0 aufgeführte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den unter 2.1 bestimmten Werten für a und b beschreibt die Lieferzeiten für die Möbel innerhalb der letzten Jahre. Die Zufallsgröße X gibt die Lieferzeit ab Bestelldatum in vollen Wochen an. Lieferzeiten von mehr als sechs Wochen kamen bisher nicht vor.

Interpretieren Sie den Erwartungswert von X im Sachzusammenhang und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E_1 : „Die Lieferzeit beträgt höchstens vier Wochen.“

E_2 : „Bei genau drei von neun Bestellungen erfolgt die Lieferung der Möbel innerhalb einer Woche.“

E_3 : „Bei zehn nacheinander eingegangenen Bestellungen erfolgt nur bei der letzten die Lieferung der Möbel erst in der sechsten Woche, alle anderen erfolgen früher.“

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 3.0** Gegen eine Gebühr liefert der Schreiner die gekauften Möbel an seine Kunden aus. Von insgesamt 200 Kunden stammen 80 aus einem Umkreis von 50 km (U) um den Standort der Schreinerei. 128 Kunden nehmen den Lieferservice nicht in Anspruch (\bar{U}).

Um die Auslieferungen besser planen zu können, hat der Schreiner in der folgenden Tabelle die Anzahl der zu beliefernden Kunden (L) – also insgesamt 72 – je nach Bestellumfang und Lieferort dargestellt.

	U	\bar{U}
≤ 2 Möbelstücke	7	17
> 2 Möbelstücke	18	30

- 4 3.1** Ergänzen Sie die nebenstehende Vierfeldertafel mithilfe der obigen Angaben.

Bestimmen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde mehr als 50 km von der Schreinerei entfernt wohnt und seine Möbel selbst abholt.

	U	\bar{U}	Σ
L			
\bar{L}			
Σ			200

- 3 3.2** Beschreiben Sie mit eigenen Worten jeweils die Bedeutung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_U(\bar{L})$ bzw. $P_{\bar{U}}(\bar{L})$ im Sachzusammenhang (ohne sie zu berechnen) und interpretieren Sie die hier geltende Beziehung $P_U(\bar{L}) > P_{\bar{U}}(\bar{L})$ im Sinne der vorliegenden Thematik.

23