FOSBOS

Fachabiturprüfung 2021

zum Erwerb der Fachhochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 15. Juni 2021, 09:00 Uhr – 10:00 Uhr

Mathematik

Ausbildungsrichtung Technik

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

3 **1** Für eine ganzrationale Funktion g vierten Grades mit ihrer Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$ gelten die beiden folgenden wahren Aussagen:

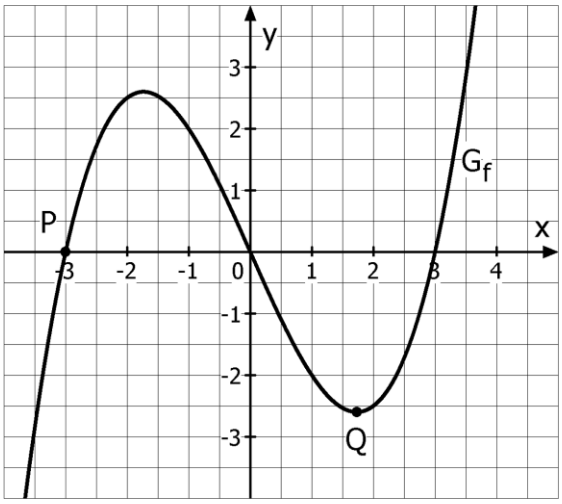
(a) $g'(3) = 0$

(b) $g(-x) - g(x) = 0$ für alle $x \in D_g$

Formulieren Sie für (a) und (b) jeweils eine sich mit Sicherheit aus der jeweiligen Aussage ergebende Eigenschaft des Graphen von g in Worten.

2.0 Die ganzrationale Funktion f mit ihrer Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ hat den Grad drei.

Nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen von f. Auf G_f liegen die Punkte $P(x_P \mid y_P)$ und $Q(x_Q \mid y_Q)$.



4 **2.1** Geben Sie jeweils an, ob $f'(x_P)$, $f''(x_P)$, $f'(x_Q)$ und $f''(x_Q)$ größer, kleiner oder gleich Null ist.

4 **2.2** Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.
Hinweis: Ganzzahlige Werte können der Abbildung in 2.0 entnommen werden.

4 **3** Zur Bestimmung des Alters kohlenstoffhaltiger Fossilien wird die C-14 Methode eingesetzt. Diese nutzt aus, dass das Verhältnis von C-14-Atomen zu den C-12-Atomen in lebenden Organismen annähernd konstant ist. Nach dem Absterben des Organismus halbiert sich die Anzahl der C-14-Atome ca. alle 5730 Jahre. Die Anzahl der C-12-Atome bleibt konstant.
Für die Anzahl $N(t)$ der C-14-Atome in einem abgestorbenen Organismus gilt somit nachfolgender Zusammenhang, wobei t die Zeit in Jahren nach Absterben des Organismus und N_0 die Anzahl der C-14-Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730} \cdot t} \quad ; \; t \in \mathbb{R}_0^+$$

Das Analyselabor Yeti 3.0 kann mit dieser Methode eine Altersbestimmung durchführen, wenn noch mindestens 3,8 % vom anfänglichen Wert N_0 vorhanden sind.

Begründen Sie, ob Yeti 3.0 kohlenstoffhaltige Fossilien bis zu einem Alter von 60000 Jahren auf ihr Alter hin untersuchen kann. Ermitteln Sie dazu überschlagsmäßig, wie viel Prozent der ursprünglichen C-14-Atome nach 57300 Jahren noch vorhanden sind.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
4	**4**	Bestimmen Sie rechnerisch die Lösung der Gleichung $e^x - 1 = \frac{6}{e^x}$ für $x \in \mathbb{R}$ mithilfe einer geeigneten Substitution.
3	**5**	Gegeben sind die folgenden Funktionen mit ihrer jeweiligen Definitionsmenge: $t: x \mapsto e^x + 2$ mit $D_t = \mathbb{R}$ $u: x \mapsto -e^{-x} + 4$ mit $D_u = \mathbb{R}$ Nachfolgend wird beschrieben, wie der Graph der Funktion t in den Graphen der Funktion u übergeführt werden kann. Es hat sich in dieser Beschreibung genau ein Fehler eingeschlichen. „Der Graph von u entsteht, indem man zunächst den Graphen von t … 1.) … an der x-Achse spiegelt, 2.) … anschließend an der y-Achse spiegelt und 3.) … danach um 2 LE parallel zur y-Achse nach oben verschiebt.“ Geben Sie an, in welchem der Schritte 1.) bis 3.) der Fehler ist, und korrigieren Sie diesen.
22		

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebene $E: -x_2 + x_3 = 5$ und der Punkt $P(4\,|-2\,|\,4)$ gegeben.
5	**1.1**	Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt. Geben Sie eine Gleichung der Geraden g durch den Punkt P an, die zur Ebene E senkrecht steht, und bestimmen Sie den Schnittpunkt L von g und E. [Teilergebnis: $L(4\,|-1{,}5\,|\,3{,}5)$]
3	**1.2**	Für den Punkt Q gilt: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL}$ Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q. Fertigen Sie ohne Verwendung eines Koordinatensystems eine Skizze an, aus der die gegenseitige Lage der Punkte P, Q und der Ebene E hervorgeht.
4	**2**	Im $\mathbb{R}^3$ sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, und begründen Sie ohne Rechnung, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Überprüfen Sie auch, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.
12		

Fachabiturprüfung 2021

zum Erwerb der Fachhochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 15. Juni 2021, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

Mathematik

Ausbildungsrichtung Technik – CAS

Teil 2: mit Hilfsmitteln

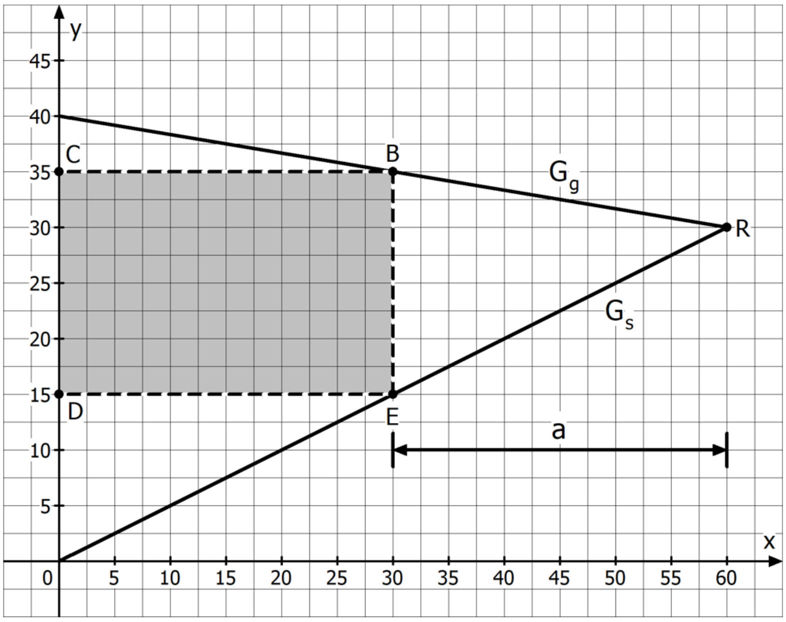
Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Lineare Algebra und analytische Geometrie* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Ein Architekt plant in eine dreieckige Grundstücksfläche eine rechteckige Fläche BCDE zur Bebauung. Die Grundstücksfläche wird von der y-Achse und den Graphen G_g und G_s zweier linearer Funktionen g und s mit der gemeinsamen Definitionsmenge $D_g = D_s = [0;60]$ begrenzt. Die Funktionsgleichung von s lautet $s(x) = 0{,}5 \cdot x$. Die Eckpunkte B und E sollen dabei dieselbe Abszisse haben (siehe nachfolgende Abbildung). Der Abstand von der rechten Grundstücksecke R zur Strecke $\overline{BE}$ wird mit a bezeichnet.



Die Koordinaten der angegebenen Punkte stellen Längenangaben mit der Einheit Meter dar. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden.

2 **1.1** Ermitteln Sie mithilfe der Zeichnung aus 1.0 die Gleichung der Funktion g. Hierzu können der Zeichnung ganzzahlige Werte entnommen werden.

4 **1.2** Bestimmen Sie die Maßzahl A(a) des Flächeninhalts der Bebauungsfläche in Abhängigkeit des Abstands a.

$\left[\text{Mögliches Ergebnis: } A(a) = 40a - \frac{2}{3}a^2\right]$

3 **1.3** Aus architektonischen Gründen soll für a gelten: $10 \leq a \leq 40$.
Ermitteln Sie den Wert von a so, dass sich eine möglichst große Bebauungsfläche ergibt.

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion $g_a: x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 - (a-1)x^2 + (a-4)x$ mit $x, a \in \mathbb{R}$. Der Graph von g_a wird mit G_{g_a} bezeichnet.

3 **2.1** Begründen Sie, warum G_{g_a} für keinen Wert von a achsensymmetrisch zur y-Achse ist und bestimmen Sie den Wert von a, für den G_{g_a} punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems ist.

7 **2.2** Ermitteln Sie in Abhängigkeit vom Wert des Parameters a die Anzahl der Nullstellen der Funktion g_a.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.3.0 Nun gilt $a = 4$ und damit $g_4(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2$ mit $D_{g_4} = \mathbb{R}$.

6 **2.3.1** Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_{g_4} und bestimmen Sie die jeweilige Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_{g_4}.

4 **2.3.2** Berechnen Sie die Nullstellen von g_4 und zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von g_4 für $-6 \le x \le 1$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.
Maßstab: x-Achse: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$, y-Achse: $2\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$

4 **2.3.3** Die Gerade G_h durch die beiden Extrempunkte von G_{g_4} schließt zusammen mit G_{g_4} im III. Quadranten zwei endliche Flächenstücke ein.
Zeigen Sie rechnerisch, dass diese beiden Flächenstücke gleich groß sind.

3.0 Bei einem Versuch im physikalischen Praktikum werden Probekörper zunächst erwärmt bzw. abgekühlt. Anschließend werden die Temperaturen der Probekörper gemessen, dokumentiert und gemäß dem Newtonschen Abkühlungsgesetz mit einer geeigneten Funktion modelliert.

Für den Körper K1 ergibt sich die Funktion $c_1 : t \mapsto 60 \cdot e^{-kt} + 20$, wobei t die Zeit in Minuten ab Messbeginn zum Zeitpunkt $t = 0$ und $c_1(t)$ die Temperatur des Körpers K1 in Grad Celsius zum Zeitpunkt t angibt. Der Koeffizient k mit $k \in \mathbb{R}^+$ ist eine Konstante mit der Einheit $1/\text{min}$.
Auf das Mitführen von Einheiten kann bei den folgenden Berechnungen verzichtet werden. Die Ergebnisse sind, sofern nicht anders verlangt, sinnvoll zu runden.

2 **3.1** Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von c_1 für $t \to +\infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

3 **3.2** 15 Minuten nach Beginn der Messung ist die Temperatur des Körpers K1 bereits um 20 % gesunken. Berechnen Sie damit den Wert der Abkühlkonstante k exakt.

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $k = 0{,}021$

3.3.0 Für einen zweiten Körper K2 wurde mithilfe der Messdaten die funktionale Abhängigkeit $c_2 :\ t \mapsto -5 \cdot e^{-0{,}021 \cdot t} + 20$ ermittelt.

2 **3.3.1** Beschreiben Sie kurz den wesentlichen Unterschied beim Versuch mit Körper K2 im Vergleich zum Versuch mit Körper K1.

3 **3.3.2** Bei den Messungen von Körper K2 aus 3.3.0 wurden versehentlich zwei Fehler begangen. Erstens wurde die Stoppuhr 30 Sekunden zu spät gestartet. Zweitens war das eingesetzte Thermometer falsch kalibriert, sodass alle gemessenen Temperaturen um 2,0 °C zu tief waren. Bestimmen Sie die entsprechend korrigierte Funktionsgleichung von c_2^*.

43

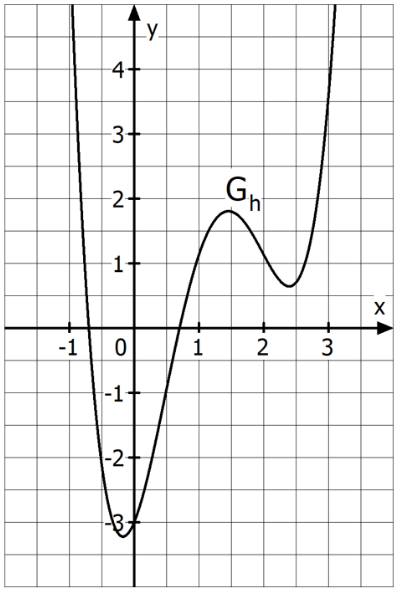
BE		
	1.0	Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}\left(x^3 + 4x^2 - 4x\right)$ mit ihrer Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
2	**1.1**	Berechnen Sie die Nullstellen von f.
6	**1.2**	Bestimmen Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von f auf zwei Nachkommastellen gerundet.
4	**1.3**	Zeichnen Sie unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f im Bereich $-5 \leq x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein Maßstab auf beiden Achsen: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$.
4	**1.4**	Der Graph der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = -x$ und der Graph von f schließen zusammen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Zeichnen Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.3 ein, kennzeichnen Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.
	2.0	Gegeben ist die Funktion $f_k: x \mapsto \frac{1}{4}\left(x^3 - kx^2 + kx\right)$ mit ihrer Definitionsmenge $D_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.
5	**2.1**	Ermitteln Sie alle Werte des Parameters k so, dass der Graph der Funktion f_k an zwei Stellen waagrechte Tangenten besitzt.
5	**2.2**	Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen der Funktion f_k in Abhängigkeit vom Wert des Parameters k.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

4 **3** Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer Funktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.

Begründen Sie mithilfe der Abbildung, ob folgende Aussagen jeweils wahr oder falsch sind.



Hinweis:
Antworten mit falscher oder fehlender Begründung werden mit 0 BE bewertet.

a) $h(x)+3 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

b) $\int_0^1 h(x)\,dx < 0$

c) Jede Stammfunktion H von h hat genau zwei Extremstellen.

d) $h''(3) < h(0)$

4.0 Auf der Internetseite der Welthungerhilfe war am 12.05.2020 über eine schwere Heuschreckenplage in Ostafrika zu lesen: „Die Vermehrung der Heuschrecken ist dabei exponentiell: In drei Monaten kann sich die Population verzwanzigfachen, in sechs Monaten ist die Zahl der Heuschrecken 400-mal, nach neun Monaten 8.000-mal so hoch.“ Ergebnisse sind ggf. auf zwei Nachkommastellen zu runden.

5 **4.1** Bestätigen Sie, dass sich die Heuschrecken laut den oben genannten Daten tatsächlich exponentiell vermehren.
Berechnen Sie den Faktor, um den sich die Heuschreckenpopulation monatlich vervielfacht.

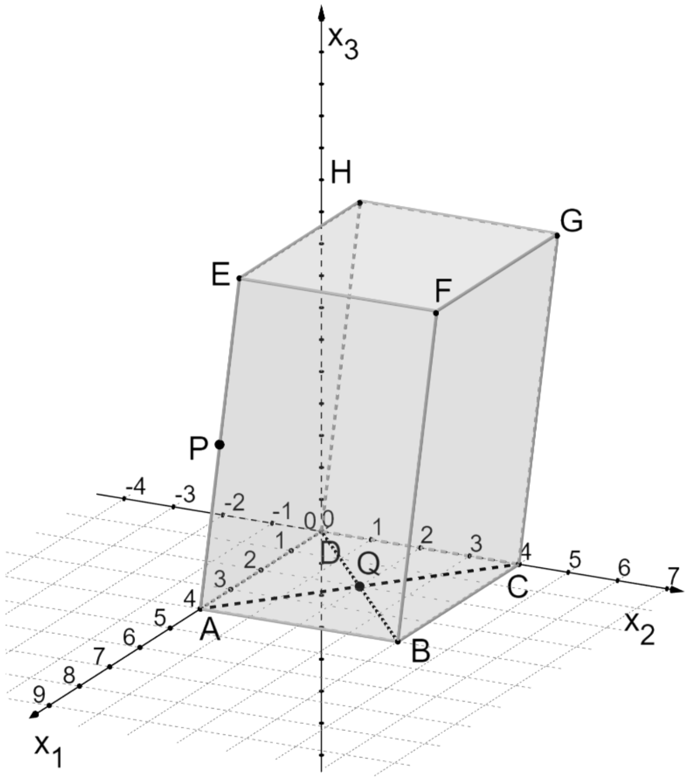
2 **4.2** Die Anzahl $N(t)$ der Heuschrecken der Population nach t Monaten lässt sich näherungsweise wie folgt darstellen: $N(t) = N_0 \cdot e^t$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$. Dabei ist N_0 die Anzahl der Heuschrecken der Population zum Zeitpunkt $t = 0$.
Ermitteln Sie die Verdopplungszeit der Heuschreckenpopulation.

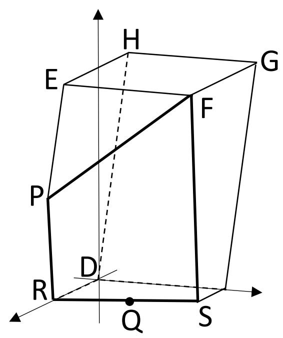
6 **4.3** In einem angrenzenden Gebiet herrschen ungünstigere Bedingungen für die Heuschrecken. Daher vervielfacht sich die Anzahl an Heuschrecken in diesem Gebiet nur mit einem Faktor von $\sqrt{e}$ pro Monat.
Geht man davon aus, dass sich in beiden Gebieten zu einem Zeitpunkt $t = 0$ jeweils gleich viele Heuschrecken N_0 aufhalten, so lässt sich der Gesamtbestand $N(t)$ nach t Monaten näherungsweise wie folgt darstellen: $N(t) = N_0 \cdot e^t + N_0 \cdot \sqrt{e}^{\,t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Berechnen Sie unter Verwendung der Substitution $u = \sqrt{e}^{\,t}$ mit $u > 0$, zu welchem Zeitpunkt sich der Gesamtbestand verzehnfacht hat.

43

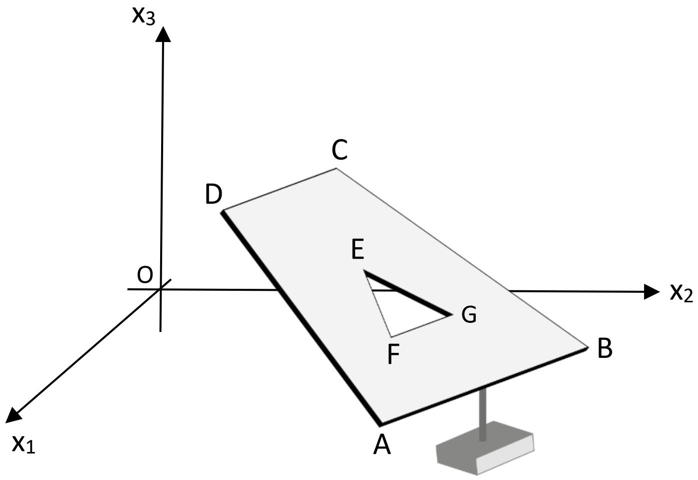
BE		
	1.0	Ein Holzklotz in Form eines Spats ABCDEFGH mit quadratischer Grundfläche soll bearbeitet werden. Er ist in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ modellhaft so dargestellt, dass die Seiten $\overline{DA}$ sowie $\overline{DC}$ auf der x_1- bzw. x_2-Achse liegen und D im Koordinatenursprung liegt. Die Seite $\overline{AE}$ wird halbiert vom Punkt $P(5\|1\|3)$. Der Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche ABCD ist $Q(2\|2\|0)$. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Dezimeter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.
4	**1.1**	Lesen Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C aus der Zeichnung ab. Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes E.
6	**1.2**	Die Punkte P, Q und $F(6\|6\|6)$ legen die Ebene K fest. Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung von K in Parameter- und Koordinatenform. [Mögliches Ergebnis: $K: 9x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 24 = 0$]
4	**1.3**	Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Gerade DF auf die Ebene K trifft. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.
5	**1.4**	Der Holzklotz wird entlang der Ebene K durchtrennt und der vordere Teil weggenommen. Dadurch ergibt sich in der Grundfläche ABCD eine Schnittkante, die die Kante $\overline{DA}$ im Punkt R sowie die Kante $\overline{CB}$ im Punkt S schneidet. Die Schnittfläche wird durch die Punkte P, R, S und F begrenzt (siehe Skizze). Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte R und S.
4	**1.5**	Erläutern Sie, wie Sie den Inhalt der Fläche PRSF berechnen können, ohne diese Rechnung konkret durchzuführen.
23		





BE

1.0 Eine Skulptur aus Leichtmetall in einer Kunsthalle hat die Form eines nicht symmetrischen Trapezes ABCD, aus dem ein Dreieck EFG ausgeschnitten wurde. Das Trapez wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Der Hallenboden liegt in der x_1-x_2-Koordinatenebene und der Punkt O im Koordinatenursprung. Die Punkte $A(7|7|2)$, $B(3|10|2)$, $C(1|4|5)$ und $D(3|2{,}5|5)$ bilden die Eckpunkte des Trapezes. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Dezimeter.
Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.



6 **1.1** Die Punkte A, B und C legen die Ebene K fest. Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung von K in Parameter- und Koordinatenform.

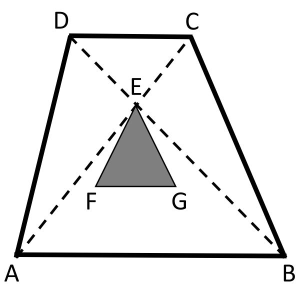
[Mögliches Teilergebnis: $K: 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 69$]

3 **1.2** Berechnen Sie den Neigungswinkel der Trapezfläche ABCD gegenüber dem Hallenboden. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

4 **1.3** Erläutern Sie, wie Sie den Inhalt der Trapezfläche ABCD berechnen können, ohne diese Rechnung konkret durchzuführen.

Hinweis: Die ausgeschnittene Dreiecksfläche EFG ist bei der Erläuterung nicht zu berücksichtigen.

5 **1.4** Der Punkt E ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ (siehe nebenstehende Skizze). Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes E.
[Mögliches Ergebnis: $E(3|5|4)$]



5 **1.5** Für den Punkt F des Dreiecks EFG gilt: $F(4{,}4|5{,}2|3{,}5)$. Berechnen Sie die Maßzahl der Länge der Dreiecksseite $\overline{EF}$ und die Koordinaten des Punktes G, wenn die Dreiecksseite $\overline{FG}$ parallel zu $\overline{AB}$ ist und $|\overline{EF}| = |\overline{FG}|$ gilt.

23