Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2021

Prüfungsfach:	**Mathematik** **(nichttechnische Ausbildungsrichtungen)**
Prüfungstag:	**Donnerstag, 01. Juli 2021**
Prüfungsdauer:	**9:00 Uhr – 12:00 Uhr**
Hilfsmittel:	**elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner;** **Merkhilfe LPPLUS Mathematik (Technik)**
Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus fünf Aufgaben (Regelung aufgrund der COVID-19-Pandemie). Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule. Die Aufgabe zur Analytischen Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.
Bewertungsschlüssel:	

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

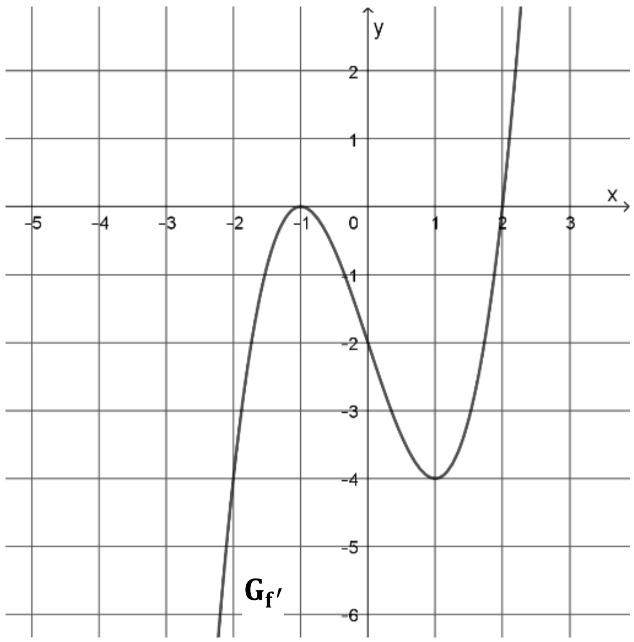
Aufgabe I

		BE
1.0	Die Funktion f mit $D_f = \mathrm{IR}$ ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Der Graph G_f der Funktion f berührt die x-Achse an der Stelle $x_1 = -3$ und schneidet die x-Achse an der Stelle $x_2 = 1{,}5$. An der Stelle $x_3 = 2$ nimmt die Funktion f den Wert $y = -5$ an.	
1.1	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f in der allgemeinen Form. $\left[\text{Mögliches Ergebnis: } f(x) = -\frac{2}{5}x^3 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{27}{5}\right]$	5
1.2	Geben Sie an, ob der Graph G_f Symmetrieeigenschaften bezüglich des Koordinatensystems aufweist und begründen Sie Ihre Aussage.	2
1.3	Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von f.	6
1.4	Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_f und zeigen Sie, dass die Wendetangente w_f die y-Achse bei $y = 6{,}75$ schneidet.	5
1.5	Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und ggf. weiterer geeigneter Funktionswerte im Bereich $-4 \leq x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab der beiden Koordinatenachsen: $1\text{LE} = 1\text{cm}$	3
1.6	Der Graph G_f schließt mit den Koordinatenachsen im II. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der grafischen Darstellung aus Aufgabe 1.5 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.	4
		25

Aufgabe II

BE

2.0 Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen $G_{f'}$, der die erste Ableitung einer ganzrationalen Funktion f darstellt.
Die Nullstellen und die Koordinaten der Extrempunkte von $G_{f'}$ sind ganzzahlig und können der Abbildung entnommen werden.



2.1 Entscheiden Sie jeweils mithilfe der Abbildung aus 2.0, ob folgende Aussagen über die Funktion f wahr oder falsch sind, und berichtigen Sie die falschen Aussagen. **4**

a) Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades.
b) G_f besitzt an der Stelle $x = -1$ einen Terrassenpunkt.
c) Der Graph der Funktion f ist im Bereich $x \in [-1; 1]$ rechtsgekrümmt.
d) Die Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle $x = 0$ hat die Steigung $m = 2$.

2.2 Geben Sie mithilfe der Abbildung aus 2.0 die maximalen Monotonieintervalle, sowie Stelle und Art des Extrempunktes von G_f an. **3**

2.3 Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme der Abbildung aus 2.0 die Funktionsgleichung der Funktion f' und geben Sie anschließend die Menge aller Stammfunktionen davon an. **5**

[Mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = x^3 - 3x - 2$]

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe II (Fortsetzung)

		BE
2.4.0	Gegeben ist nun eine mögliche Stammfunktion f von f' durch ihre Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 6x^2 - 8x + 2)$ mit ihrer Definitionsmenge $D_f = IR$. (Nachweis nicht erforderlich)	
2.4.1	Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen G_f mit der y-Achse sowie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.	3
2.4.2	Die Wendenormale n des Graphen G_f schließt mit der Wendetangente im Wendepunkt $WEP(1\|y_w)$ einen rechten Winkel ein. Ermitteln Sie die Geradengleichung der Wendenormalen n. (Hinweis: Für zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 gilt folgender Zusammenhang: $m_1 \cdot m_2 = -1$)	4
2.4.3	Zeichnen Sie G_f unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse und ggf. weiterer geeigneter Funktionswerte im Bereich von $-2 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab der beiden Koordinatenachsen: $1LE = 1cm$	3
2.4.4	Der Graph der Funktion f, der Graph der Funktion f' und die senkrechten Geraden $x = -2$ und $x = 0$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. (Hinweis: Es darf ohne Nachweis angenommen werden, dass die beiden Graphen im angegebenen Bereich keine gemeinsamen Punkte aufweisen.)	3
		25

Aufgabe III

		BE
3.0	Die Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet. G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, hat im Punkt $A(2\|6)$ einen Extrempunkt und schneidet die y-Achse bei $y = 2$. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.	
3.1	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f. $\left[\text{Mögliches Ergebnis: } f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 2\right]$	5
3.2	Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.	4
3.3	Zeigen Sie rechnerisch, dass es sich bei dem Punkt A um einen Hochpunkt von G_f handelt.	2
3.4	Ermitteln Sie die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen von f und bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f.	6
3.5	Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $-3 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab der beiden Koordinatenachsen: $1\text{LE} = 1\text{cm}$	4
3.6	Gegeben ist eine zweite Funktion h durch ihre Funktionsgleichung $h(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 4x^3 + 8x^2$ mit $D_h = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion h wird mit G_h bezeichnet. Bestimmen Sie die x-Werte der gemeinsamen Punkte der Graphen G_f und G_h.	4
		25

Aufgabe IV

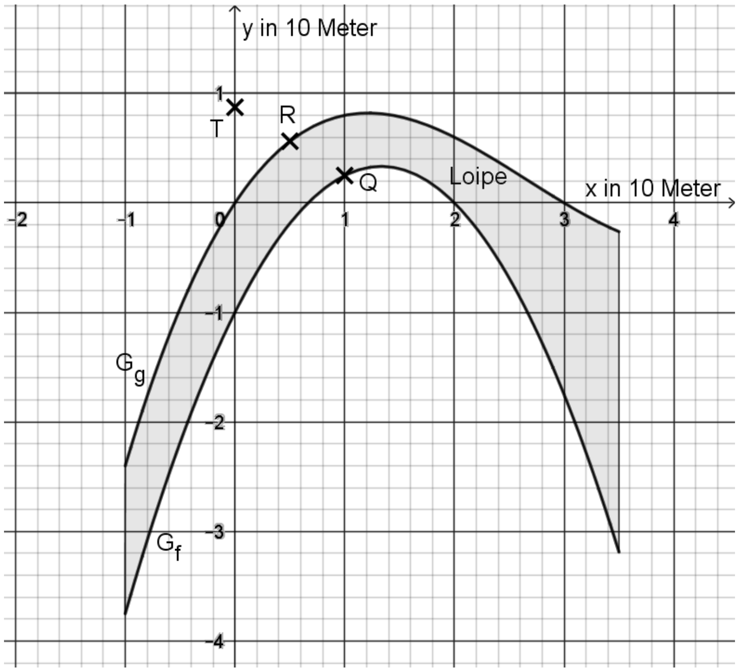
		BE
4.0	Ein Drachenflieger beginnt seinen Flug auf einem Berg 1000 m höher als sein Landeplatz. Er landet in 25,35 km horizontaler Entfernung rechts vom Abflugpunkt. Die Flugkurve kann dabei in guter Näherung durch den Graphen der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}35x^3 + 8{,}5x^2 - 30x + 1000 \quad \text{mit } D_f = [0; 25{,}35]$ beschrieben werden. Die Funktion f gibt die aktuelle Höhe des Drachenfliegers bezüglich des Landeplatzes in Metern an. Der Wert für x stellt die horizontale Entfernung des Drachenfliegers von seinem Startpunkt bis zum Landepunkt in Kilometern dar. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.	
4.1	Ermitteln Sie die größtmöglichen Bereiche, in welchen der Drachenflieger an Höhe verliert bzw. gewinnt. Geben Sie zudem die maximale Höhe während des Flugs an, sowie die Stelle, an der diese maximale Höhe erreicht wird.	7
4.2	Bestimmen Sie den Wendepunkt der Flugkurve und interpretieren Sie dessen Bedeutung im Sachkontext.	4
4.3	Zeichnen Sie die Flugkurve im gesamten Definitionsbereich in ein kartesisches Koordinatensystem unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte. Verwenden Sie hierzu jeweils einen geeigneten Maßstab für die beiden Koordinatenachsen.	4

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe IV (Fortsetzung)

		BE
4.4	Ein Segelflugzeug befindet sich in der Landephase. Die Flugkurve dieser Landephase kann in guter Näherung durch den Graphen einer linearen Funktion s mit $D_s = [0; 40]$ beschrieben werden. Das Segelflugzeug fliegt genau 1800 m über den Startpunkt des Drachenfliegers und landet 14,65 km in horizontaler Richtung rechts vom Landeplatz des Drachenfliegers ebenfalls am Boden. Die beiden Landeplätze befinden sich auf gleicher Höhe. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion s. [Mögliches Ergebnis: $s(x) = -70x + 2800$]	3
4.5	Aus Sicherheitsgründen muss gewährleistet werden, dass der Abstand von Drachenflieger und Segelflugzeug in y-Richtung stets mindestens 300 m beträgt. Untersuchen Sie, ob dieser vertikale Sicherheitsabstand im vorliegenden Fall immer eingehalten wird. Bestimmen Sie dazu die Stelle, an welcher die Flugkurve des Segelfliegers und die des Drachenfliegers die kürzeste Distanz in y-Richtung zueinander haben und berechnen Sie den Höhenunterschied der beiden Flugkurven an dieser Stelle.	7
		25

Aufgabe V

		BE
5.0	Eine Langlaufloipe (grau hinterlegter Bereich in der folgenden Abbildung) wird wie in der unten abgebildeten Draufsicht durch die beiden Funktionsgraphen G_g und G_f der Funktionen g und f mit $D_g = D_f = [-1; 3{,}5]$ begrenzt. Zwischen den Punkten $R(0{,}5\|0{,}5625)$ und $Q(1\|0{,}25)$ verläuft ein gerades Rohr, in welchem Kabel zur Stromversorgung verlegt werden können. Eine Längeneinheit auf den Koordinatenachsen entspricht jeweils 10 m. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen. 	
5.1	Die Funktion g ist durch die Funktionsgleichung gegeben: $g(x) = 0{,}1x(x-3)(x-5)$ Zeigen Sie, dass sich diese Funktionsgleichung auch folgendermaßen darstellen lässt: $g(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}8x^2 + 1{,}5x$	2
5.2	Bestimmen Sie mit Hilfe der obigen Abbildung von G_f die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion f. Zusätzlich benötigte, ganzzahlige Werte dürfen der Abbildung entnommen werden. [Mögliches Ergebnis: $f(x) = -0{,}75x^2 + 2x - 1$]	5

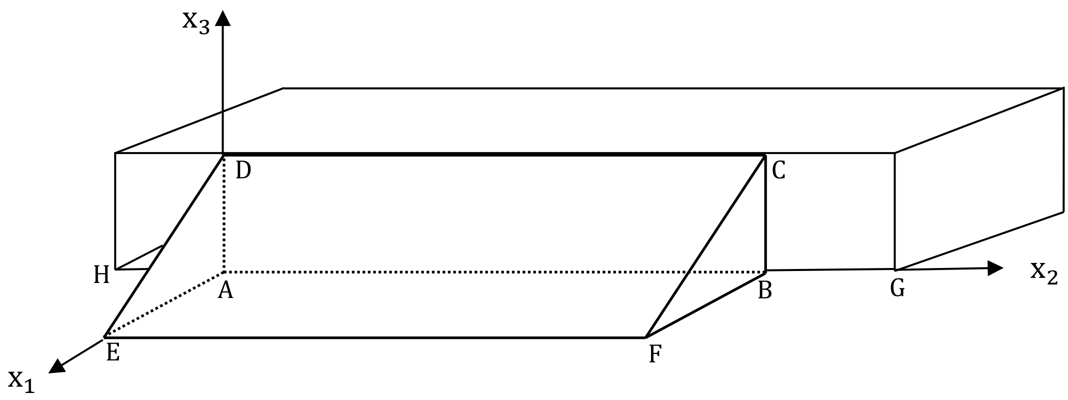
(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe V (Fortsetzung)

		BE
5.3.0	Am Ort $T(0\|0{,}875)$ steht eine Webcam, die die Langläufer bei Wettkämpfen filmt. Diese wird durch ein Kabel, das im Rohr zwischen den Punkten R und Q liegt, mit Strom versorgt. (siehe Abbildung aus 5.0)	
5.3.1	Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Stromkabel zur Webcam geradlinig verlegt werden kann. Prüfen Sie dazu, ob die Punkte R, Q und T auf einer Geraden liegen.	3
5.3.2	Berechnen Sie die Mindestlänge des Kabels zwischen Q und T in Metern.	3
5.4	Bedingt durch das Gelände variiert die Breite der Loipe. Allerdings muss zur Vermeidung von Unfällen im Wettkampf sichergestellt sein, dass an der Stelle des Scheitels von G_f die Loipe in y-Richtung gemessen mindestens 4 m breit ist. Überprüfen Sie rechnerisch, ob diese Bedingung eingehalten wird.	4
5.5	Um die Schneesicherheit der Loipe sicherzustellen, plant der Veranstalter, Kunstschnee zu produzieren und diesen bei Bedarf auf der Loipe aufzubringen. Bestimmen Sie dafür die Maßzahl des Flächeninhalts der Loipe für $-1 \leq x \leq 3{,}5$ in Quadratmetern.	6
5.6	Um Wettkämpfe mit mehr Athleten austragen zu können, soll die Loipe verbreitert werden. Dazu soll die durch G_f beschriebene Außengrenze abgeändert werden. Planer M schlägt einen Verlauf vor, der durch den Graphen G_m mit $m(x) = -0{,}7\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$ beschrieben wird. Planer J dagegen hält einen Verlauf gemäß dem Graphen G_j mit $j(x) = -0{,}9\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$ für angebracht. Entscheiden Sie begründet, welcher Plan die gewünschte Änderung am besten umsetzt.	2
		25

Aufgabe VI

		BE
6.0	Für eine Lagerhalle soll eine Rampe hergestellt werden, die von einem Gabelstapler befahren werden kann. Diese ist am quaderförmigen Fundament der Lagerhalle befestigt. Zur geometrischen Beschreibung dieser Rampe wird ein kartesisches Koordinatensystem festgelegt. Untenstehende, nicht maßstabsgetreue Abbildung zeigt modellhaft diese Rampe, die auf einer ebenen, horizontalen Fläche steht. Von der Rampe sind folgende Punkte mit den Koordinaten A(0|0|0), B(0|7|0), C(0|7|1), D(0|0|1), E(6|0|0) und F(6|7|0) bekannt. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.	



		BE
6.1	Die Rampe hat die Form eines geraden Prismas. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{EF}$ parallel verlaufen und alle gleich lang sind. Geben Sie die Länge der Vektoren an.	3
6.2	Berechnen Sie die Länge der Auffahrt, in dem Sie die Länge der Strecke $\overline{ED}$ berechnen.	2
6.3	Der Gabelstapler kann einen maximalen Steigungswinkel von 12° überwinden. Ermitteln Sie rechnerisch, ob die Rampe für diesen Gebrauch geeignet ist.	4

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe VI (Fortsetzung)

		BE
6.4	Für die Anlieferung der Rampe ist es notwendig, die Masse in kg anzugeben. Hierbei wird die Formel $M = \rho \cdot V$ angewendet. Es gilt: M ist die Masse des Körpers in kg, ρ dessen Dichte in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und V das Volumen des Körpers in m^3. Berechnen Sie die Masse M, wenn die Rampe eine Dichte von $\rho = 92{,}99\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ hat.	4
6.5	Die Rampe soll nun mittig zum quaderförmigen Fundament der Lagerhalle angebracht werden. Das Fundament hat eine Länge von 12 m. Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte G und H des Fundamentes an, die auf der x_2-Achse liegen, von welchen aus die Rampenposition bestimmt wurde.	2
6.6	In der Mitte der Rampenoberseite CDEF soll das Firmenlogo aufgebracht werden. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes P der Rampenoberseite.	2
6.7.0	Aufgrund von Sicherheitsbestimmungen müssen zwei Stahlplatten als Seitenbegrenzungen auf der Rampe angebracht werden. Die dafür notwendigen Eisenstangen werden auf der Rampe in den Eckpunkten C, D, E und F senkrecht zur x_1-x_2-Ebene befestigt. Sie sind jeweils 1,5 m hoch. Die oberen Endpunkte der Eisenstangen werden mit C', D', E' und F' bezeichnet.	
6.7.1	Benennen Sie die geometrische Form der Stahlplatte $DD'E'E$ und geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte C', D', E' und F' an.	3
6.7.2	Der Spediteur bestellt Stahlplatten, welche 52,00 € brutto pro Quadratmeter kosten. Berechnen Sie die anfallenden Kosten der beiden Stahlplatten, wenn bei sofortiger Zahlung noch 3% Skonto (= Preisnachlass) gewährt werden.	5
		25