Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2021

Prüfungsfach: **Mathematik (technische Ausbildungsrichtung)**

Prüfungstag: **Donnerstag, 01. Juli 2021**

Prüfungsdauer: **9:00 Uhr – 12:00 Uhr**

Hilfsmittel: **elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner; Merkhilfe LPPLUS Mathematik (Technik)**

Hinweise:

Der Bereich Analysis besteht aus fünf Aufgaben. (Regelung aufgrund der COVID-19-Pandemie)

Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.

Bewertungsschlüssel:

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

Aufgabe I

		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion f mit ihrer Funktionsgleichung $$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x-0{,}5}$$ auf der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_f.	
1.1	Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_f und die Nullstellen von f.	**3**
1.2	Ermitteln Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten von G_f und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Asymptoten an. [mögliches Zwischenergebnis: $f(x)=x-3{,}5+\frac{5}{4x-2}$]	**4**
1.3	Bestimmen Sie rechnerisch Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f. [mögliches Zwischenergebnis: $f'(x)=\frac{x^2-x-1}{(x-0{,}5)^2}$]	**6**
1.4	Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t, die G_f an der Stelle $x_t=-2$ berührt.	**3**
1.5	Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-3 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie dabei auch ihre bisherigen Ergebnisse. Zeichnen Sie außerdem die beiden Asymptoten und die Tangente t aus den vorangegangenen Teilaufgaben mit in das Koordinatensystem ein. (Maßstab: x-Achse: $1\,\text{cm}=1\,\text{LE}$; y-Achse: $1\,\text{cm}=2\,\text{LE}$)	**5**
1.6	Der Graph G_f schließt mit der x-Achse im IV. Quadraten ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. Runden Sie Ihr Ergebnis ggf. auf zwei Nachkommastellen.	**4**
		25

Aufgabe II

		BE
2.0	Vom Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' mit $D_{f'} = \mathbb{R}$ und $$f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1;\quad a,b,c \in \mathbb{R}$$ sind folgende Eigenschaften bekannt: - relativer Hochpunkt bei $H(1\|0)$, - Wendepunkt bei $x = 2$.	
2.1	Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von f'. [mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 6x^2 + 9x - 4)$]	**6**
2.2	Geben Sie die Funktionsgleichung von f' in faktorisierter Form an.	**4**
2.3	Ermitteln Sie die Koordinaten des relativen Tiefpunktes des Graphen von f'.	**4**
2.4	Zeichnen Sie den Graphen von f' unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $-1 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab: x-Achse: $1\,\text{cm} = 1\,\text{LE}$; y-Achse: $1\,\text{cm} = 1\,\text{LE}$)	**3**
2.5	Eine zu f' gehörige Stammfunktion f verläuft durch den Koordinatenursprung. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f. [mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + \frac{9}{8}x^2 - x$]	**2**
2.6	Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen G_f und die Koordinaten dessen relativen Extrempunkts an.	**3**
2.7	Der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' schließt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung von 2.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes.	**3**
		25

Aufgabe III

		BE
3.0	Gegeben ist die reelle Funktion f durch ihre Funktionsgleichung: $$f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{2x-4}\right)$$ Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.	
3.1	Zeigen Sie, dass $$D_f=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$$ die maximale Definitionsmenge der Funktion f beschreibt.	3
3.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und für $x\to-\infty$ sowie für $x\to\infty$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.	6
3.3	Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f.	2
3.4	Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen G_f. Schließen Sie daraus auf die Existenz und ggf. die Art von relativen Extrempunkten von G_f. [mögliches Zwischenergebnis: $f'(x)=\frac{-4}{x^2-4}$]	4
3.5	Zeichnen Sie den Graphen von f und seine Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $-7\leq x\leq 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab: x-Achse: $1\,\text{cm}=1\,\text{LE}$; y-Achse: $1\,\text{cm}=1\,\text{LE}$)	4
3.6	Zeichnen Sie den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' im Bereich von $2<x\leq 7$ in die Zeichnung aus Aufgabe 3.5 ein.	2
3.7	Der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' und die Geraden $x=3$ und $x=5$ schließen mit der x-Achse ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl A des Flächeninhaltes.	4
		25

Aufgabe IV

BE

4.0 Auf einem nach Süden ausgerichteten Dach befindet sich ein Photovoltaikmodul. Die elektrisch abgegebene Leistung wird zu verschiedenen Uhrzeiten gemessen. Die Messungen werden am längsten Tag des Jahres (21. Juni) bei wolkenlosem Himmel durchgeführt.
Aus den Messwerten soll eine Funktion P modelliert werden, welche die vom Modul abgegebene elektrische Leistung P in Abhängigkeit von der Zeit t wiedergibt. Dabei gibt $P(t)$ die Leistung in der Einheit Watt [W] an. Die Zeit t wird in Stunden [h] angegeben.
Weil die Leistungskurve achsensymmetrisch zur Uhrzeit mit dem höchsten Sonnenstand verläuft, soll die Zeit des höchsten Sonnenstandes mit $t=0$ angenommen werden. Negative Werte von t beschreiben also Zeitpunkte in Stunden **vor** dem höchsten Sonnenstand; dementsprechend bedeuten positive Werte für t Zeitpunkte in Stunden **nach** dem höchsten Sonnenstand.
Es stehen folgende Messwerte zur Verfügung:

Zeit t in Stunden	-4	0	2
Elektrische Leistung P in Watt	144	256	225

Auf die Mitführung von Einheiten während der Berechnung kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.

4.1 Bestimmen Sie den Term $P(t)$ der Polynomfunktion P vierten Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur P-Achse des Koordinatensystems verläuft und die elektrische Leistung in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. **4**

[mögliches Zwischenergebnis: $P(t)=\frac{t^4}{16}-8t^2+256$]

4.2 Ermitteln Sie eine sinnvolle Definitionsmenge der Funktion P und geben Sie die Zeitdauer in Stunden an, in der das Solarmodul elektrische Energie abgeben kann. **4**

4.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von P und interpretieren Sie die Bedeutung der Ergebnisse im Sachkontext. **5**

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe IV (Fortsetzung)

		BE
4.4	Zeichnen Sie den Graphen G_P der Funktion P in ein kartesisches Koordinatensystem im Bereich $-8 \leq t \leq 8$ ein. (Maßstab: t-Achse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{Stunde}$; $P(t)$-Achse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 25\,\text{W}$)	**3**
4.5	Im Diagramm aus 4.4 entspricht die Fläche unter dem Graphen G_P der abgegebenen elektrischen Energie W_1 (in der Einheit Wh). Berechnen Sie die während des dargestellten Zeitraumes abgegebene Energie.	**3**
4.6.0	Die vom Photovoltaikmodul abgegebene elektrische Leistung wird nun an einem wolkenlosen Dezembertag gemessen. Es wird während einer Zeitdauer von acht Stunden elektrische Energie abgegeben. Die maximale Leistung an diesem Tag beträgt nur 116 Watt. Aus Gründen der Einfachheit soll jetzt die Leistungskurve P_D, welche die abgegebene elektrische Leistung am genannten Dezembertag beschreibt, durch eine zur y-Achse achsensymmetrische Parabel angenähert werden.	
4.6.1	Zeigen Sie, dass für den Funktionsterm P_D gilt: $P_D(t) = -7{,}25t^2 + 116 \quad \text{mit } D_{P_D} = [-4;4]$	**2**
4.6.2	Bestimmen Sie die während des Dezembertages insgesamt abgegebene elektrische Energie W_D und berechnen Sie den Anteil zu der am 21. Juni abgegebenen Energie W_1.	**4**
		25

Aufgabe V

		BE
5.0	Zu Beginn der Corona-Pandemie konnte man ein verändertes Einkaufsverhalten beobachten. Insbesondere Toilettenpapier stand im Fokus der Konsumenten. Durch die Funktion p wird die Anzahl der an einem Tag in einem kleinen Supermarkt verkauften Packungen Toilettenpapier beschrieben. Gegeben ist die Funktion p durch: $$p(t)=12t\cdot e^{-0,2t}+3 \text{ mit } D_p=\mathbb{R}_0^+$$ Dabei gibt $p(t)$ die Anzahl der an einem Tag verkauften Packungen an. t steht für die Anzahl der Tage seit Beginn der Pandemie. $t=1$ bezeichnet also den ersten Tag der beobachteten Veränderungen im Einkaufsverhalten. Der Graph der Funktion p wird mit G_p bezeichnet. Auf die Mitführung von Einheiten kann während der Berechnung verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.	
5.1	Bestimmen Sie den Funktionswert für $t=0$ und das Verhalten der Funktion p für sehr große Werte von t und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang. Geben Sie die Gleichung der Asymptote an.	4
5.2	Ermitteln Sie den Tag t_1, an dem die meisten Packungen während der Pandemie verkauft wurden und geben Sie die dazugehörige Anzahl der Packungen an. [mögliches Zwischenergebnis: $p'(t)=(12-2,4t)\cdot e^{-0,2t}$]	5
5.3	Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen der Funktion p und interpretieren Sie dessen Bedeutung im Sachkontext.	4
5.4	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_p sowie dessen Asymptote im Bereich $0\le t\le 22$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab: t-Achse: $1\text{ cm}=2\text{ LE}$; $p(t)$-Achse: $1\text{ cm}=2\text{ LE}$)	3

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

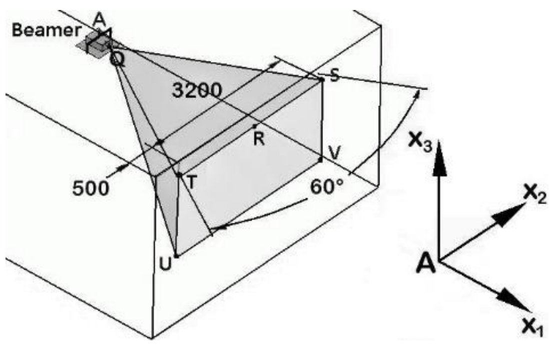
Aufgabe V (Fortsetzung)

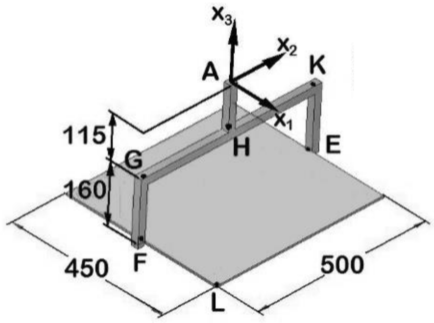
		BE
5.5.0	Zusätzlich ist die Funktion P mit ihrer Funktionsgleichung $$P(t) = (-60t - 300) \cdot e^{-0,2t} + 3t \text{ mit } D_P = \mathbb{R}_0^+$$ gegeben.	
5.5.1	Zeigen Sie, dass die Funktion P eine Stammfunktion der Funktion p ist.	**2**
5.5.2	Am Morgen des zweiten Tages wird das Lager aufgefüllt, so dass insgesamt 165 Packungen Toilettenpapier vorhanden sind. Die verkaufte Anzahl an Packungen über einen längeren Zeitraum kann näherungsweise durch das entsprechende bestimmte Integral ermittelt werden. Die nächste Lieferung trifft erst am Ende des zehnten Tages ein. Entscheiden Sie durch Rechnung, ob die vorhandene Menge Toilettenpapier laut obiger Näherung bis zum Ende des zehnten Tages ausreicht.	**3**
5.5.3	Vor der Pandemie lag der durchschnittliche Verkauf von Toilettenpapier bei drei Packungen pro Tag. Berechnen Sie die durchschnittliche, täglich verkaufte Anzahl für den Zeitraum von $t = 1$ bis $t = 40$ mit Hilfe der in 5.5.2 genannten Näherung. Ermitteln Sie damit den prozentualen Anstieg der täglichen Verkaufszahl gegenüber der Zahl vor der Pandemie.	**4**
		25

Aufgabe VI

BE

6.0 Ein Beamer soll in einem Raum mit den Abmessungen (L x B x H) 10 000 mm x 5 000 mm x 3 000 mm angebracht werden. Die untenstehenden Abbildungen sind zur Verdeutlichung der Angaben heranzuziehen. Es wird ein kartesisches Koordinatensystem festgelegt. Als Nullpunkt wird der Befestigungspunkt A der Beamerhalterung an der Decke gewählt. Die Präsentationsfläche hat eine Breite von 3 200 mm. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Millimeter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Berechnung kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf ganze Zahlen.
Die Dicke der Materialien (Streben und Platten) wird vernachlässigt.





Beamerhalterung

6.1 Die Auflagefläche für den Beamer hat die Abmaße 450 mm x 500 mm. Diese befindet sich mittig unterhalb des Koordinatenursprungs und ist parallel zur Zimmerdecke. **3**
Folgende Maße sind bekannt:
Beameraufhängung $\left|\overline{AH}\right| = 115$ mm, seitliche Streben $\left|\overline{GF}\right| = \left|\overline{KE}\right| = 160$ mm.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte F, E und L.

6.2 Geben Sie die Ebenengleichung E_1 der Beamerauflagefläche in Parameter- und Koordinatenform an. **3**

6.3 Es soll an der Wand die Präsentationsfläche $STUV$ angestrahlt werden. Der Öffnungswinkel des Lichtkegels parallel zur Auflagefläche beträgt 60° (siehe Skizze oben). Gehen Sie von einem idealen Strahlverhalten und einer punktförmigen Lichtquelle Q mit den Koordinaten $Q(200|0|-180)$ aus. **2**
Berechnen Sie, wie weit die Wand mindestens vom Punkt Q entfernt sein muss, damit die gesamte Breite der Projektionsfläche ausgenutzt werden kann.

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe VI (Fortsetzung)

		BE
6.4	Die Projektionswand legt die Ebene E_2 fest. Diese wird durch die Ebenengleichung $$E_2:\ x_1 - 2\,972 = 0$$ beschrieben. Der „Richtungsvektor" eines äußeren Lichtstrahls W_1 wird angegeben mit: $$\vec{W}_1 = \begin{pmatrix} 693 \\ -400 \\ -400 \end{pmatrix}$$ Dieser trifft im Punkt U auf die Projektionswand. Prüfen Sie rechnerisch nach, ob bei gegebener Ebenengleichung E_2 der Mindestabstand der Wand zur Lichtquelle Q von 2771 mm eingehalten ist und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes U. [mögliches Zwischenergebnis: $U\left(2\,972 \mid -1\,600 \mid -1\,780\right)$]	**5**
6.5	Der Punkt R befindet sich in der Mitte der Strecke $\overline{TS}$ auf der Wand. Der zweite Lichtstrahl W_2 von Q ausgehend trifft in R auf die Wand. Dieser nach unten geneigte Lichtstrahl schließt mit der Horizontalen einen Winkel von 2° ein. Berechnen Sie zuerst die Koordinaten des Punktes R und daraus unter Zuhilfenahme der vorhergehenden Aufgabe die Höhe der angestrahlten Wandfläche. [mögliches Zwischenergebnis: $R\left(2\,972 \mid 0 \mid -277\right)$]	**4**
6.6	In einem Verkaufskatalog finden Sie verschiedene Leinwände. Entscheiden Sie, welche Projektionswand Sie wählen würden, begründen Sie Ihre Entscheidung kurz und berechnen Sie den zugehörigen Flächeninhalt in m².	**2**

Breite [m] x Höhe [m]	Breite [m] x Höhe [m]	Breite [m] x Höhe [m]
3,1 x 1,4	3,2 x 1,4	3,3 x 1,4
3,1 x 1,5	3,2 x 1,5	3,3 x 1,5
3,1 x 1,6	3,2 x 1,6	3,3 x 1,6

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe VI (Fortsetzung)

		BE
6.7	Das Verhältnis B/H (Breite $\hat{=} \left\|\overline{TS}\right\|$; Höhe $\hat{=} \left\|\overline{UT}\right\|$) der Projektionsfläche, die in der vorherigen Aufgabe gewählt wurde, wird beibehalten. Berechnen Sie die maximal mögliche Größe des projizierten Bildes, wenn der Beamer weiter hinten im Raum montiert wird und man die gegebene Wandgröße von 5 000 mm Breite und 3 000 mm Höhe möglichst vollständig ausnutzt.	**3**
6.8	Damit die Projektionsfläche nicht bis knapp unter die Decke reicht, wird die Auflagefläche der Beamerhalterung um die Achse EF um 10% nach unten geneigt. Berechnen Sie die neue Ebenengleichung E_3 der Auflagefläche in Parameterform.	**3**
		25