Abiturprüfung 2022

zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 31. Mai 2022, 09:00 Uhr – 10:00 Uhr

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

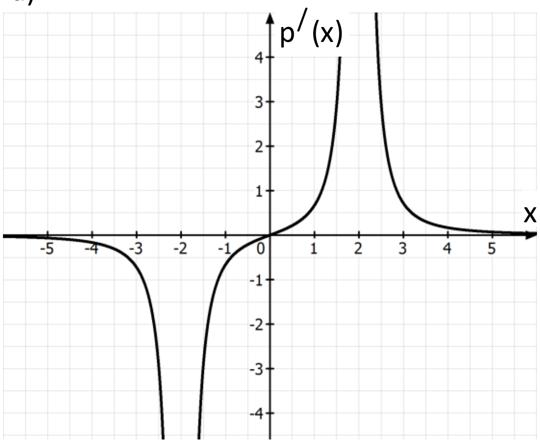
1.0 Gegeben ist die Funktion p durch $p(x)=\frac{x^2-1}{4-x^2}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_p=\mathbb{R}\setminus\{-2;\ 2\}$. Der Graph der Funktion p wird mit G_p bezeichnet.

2 **1.1** Untersuchen Sie, ob G_p eine Symmetrie zum Koordinatensystem besitzt und geben Sie diese gegebenenfalls an.

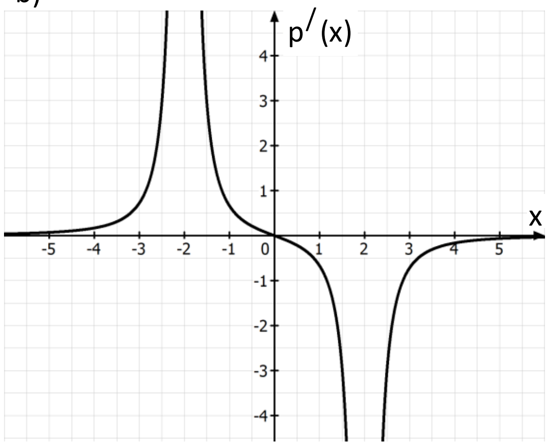
7 **1.2** Bestimmen Sie die Art der Definitionslücken von p sowie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_p mit den Koordinatenachsen. Geben Sie auch für jede Asymptote des Graphen G_p die Art und die Gleichung an.

3 **1.3** Eine der folgenden zwei Abbildungen zeigt den Graphen der ersten Ableitungsfunktion p' der Funktion p. Nennen Sie den Buchstaben des richtigen Graphen und begründen Sie Ihre Wahl durch ein Argument.

a)



b)



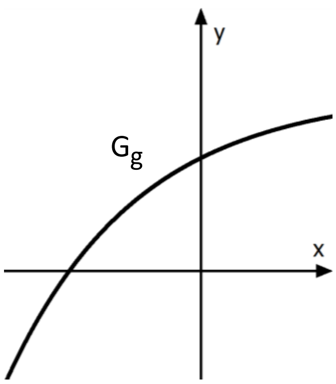
2.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x\cdot\ln(x+3)$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f=\,]-3;\infty[$.

3 **2.1** Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f an den Rändern der Definitionsmenge D_f.

3 **2.2** Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f.

4 **3** Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $g: x \mapsto -e^{-0{,}5x}+e$ mit der Definitionsmenge $D_g=\mathbb{R}$.

Die Funktion $G: x \mapsto 2e^{-0{,}5x}+ex$ mit der Definitionsmenge $D_G=\mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts des endlichen Flächenstücks, das der Graph von g mit den Koordinatenachsen im zweiten Quadranten einschließt.



22

BE

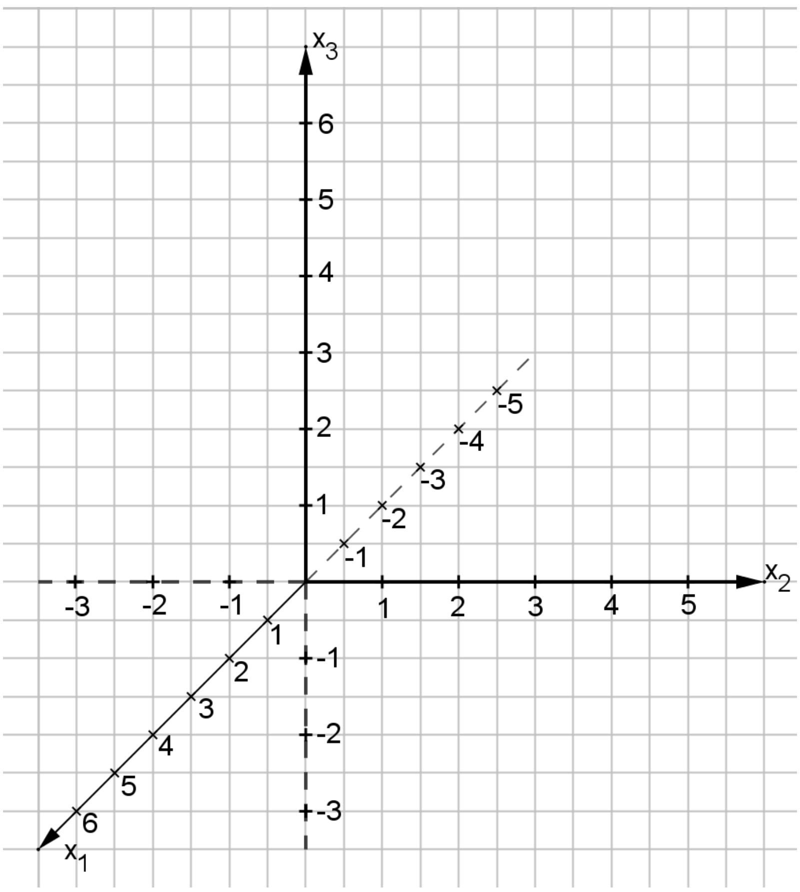
1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebene $E: 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 10$ sowie die Punkte P(6|2|4) und Q(–6|22|12) gegeben.

4 **1.1** Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g, die die Punkte P und Q enthält, und zeigen Sie, dass die Gerade g die Ebene E senkrecht schneidet.

2 **1.2** Die Ebene F enthält den Punkt P und liegt parallel zur Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F.

2.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A(2|2|0), B(2|5|0), C(–3|2|0) und D(1|3|4) Eckpunkte der Pyramide ABCD mit der dreieckigen Grundfläche ABC.

3 **2.1** Zeichnen Sie die Pyramide ABCD in das unten abgebildete Koordinatensystem ein.



3 **2.2** Die Gerade ℓ steht senkrecht auf der Grundfläche ABC der Pyramide, verläuft durch den Punkt D und schneidet die Grundfläche ABC im Punkt L. Geben Sie die Gleichung der Geraden ℓ sowie die Koordinaten des Schnittpunktes L an.

12

FOSBOS

Abiturprüfung 2022

zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 31. Mai 2022, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Lineare Algebra und analytische Geometrie* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{x^2-4x+8}{-2x+4}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

5 **1.1** Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen besitzt und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f bei links- und rechtsseitiger Annäherung an die Definitionslücke. Geben Sie die Art der Definitionslücke an.

4 **1.2** Ermitteln Sie jeweils die Art und die Gleichung aller Asymptoten von G_f.

[Mögliches Teilergebnis: $f(x)=-\frac{1}{2}x+1+\frac{4}{-2x+4}$]

8 **1.3** Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie jeweils die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von G_f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x)=\frac{-2x^2+8x}{(-2x+4)^2}$]

6 **1.4** Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte sowie alle Asymptoten für $-6\le x\le 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Geben Sie die Wertemenge der Funktion f an.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

1.5.0 Gegeben ist die Funktion $F: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2+x-2\ln(-2x+4)$ mit der Definitionsmenge $D_F=\,]-\infty;2[$.

3 **1.5.1** Zeigen Sie, dass F in D_F eine Stammfunktion von f ist.

3 **1.5.2** Der Graph G_f, die Gerade mit der Gleichung $x = -6$ und die beiden Koordinatenachsen schließen im zweiten Quadranten ein endliches Flächenstück ein.
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieses Flächenstücks auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Fortsetzung siehe nächste Seite

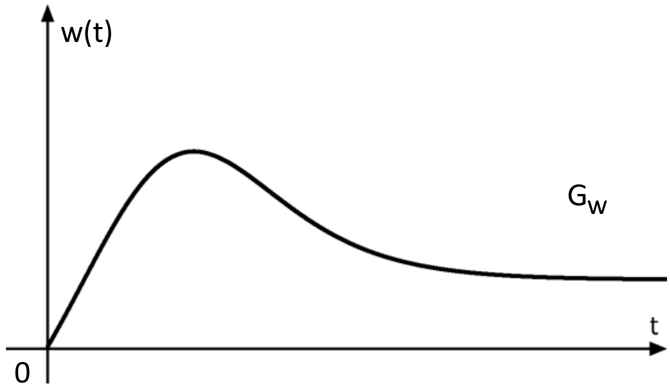
BE

2.0 Nach Öffnung einer Schleuse gibt für $t \geq 0$ die Funktion w mit

$$w(t) = \frac{e^{2t} + 60e^{t} - 60}{e^{2t} + 10e^{t} + 25}$$

die zeitliche Entwicklung des Wasserdurchflusses in einem Kanal an einer Messstelle an. Der Wasserdurchfluss ist das Volumen des Wassers in m^3, das an dieser Stelle pro Sekunde vorbeifließt. Die Zeit t wird ab Öffnung der Schleuse zum Zeitpunkt t = 0 in Sekunden gemessen. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_w der Funktion w.

Bei allen Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.



2 **2.1** Geben Sie den Wasserdurchfluss eine Sekunde nach Öffnung der Schleuse und für $t \to \infty$ an.

4 **2.2** Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Wasserdurchfluss erstmals seit Beginn der Beobachtung den Wert von $1{,}0\ \frac{m^3}{s}$ überschreitet.

1 **2.3** Zeigen Sie, dass die Funktion w auch durch die Gleichung $w(t) = \dfrac{e^{2t} + 60e^{t} - 60}{(e^{t} + 5)^2}$ dargestellt werden kann.

7 **2.4** Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunktes von G_w und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang. Hinweis: Der Nachweis, dass ein Hochpunkt vorliegt, muss nicht erbracht werden.

[Mögliches Teilergebnis: $\dot{w}(t) = \dfrac{-50e^{2t} + 420e^{t}}{(e^{t} + 5)^3}$]

43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -1 + (\ln(x))^2$ mit der Definitionsmenge $D_f =]0;\infty[$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

6 **1.1** Zeigen Sie, dass $x_1 = e^{-1}$ und $x_2 = e$ die einzigen Nullstellen von f sind. Bestimmen Sie auch das Verhalten der Funktionswerte von f an den Rändern des Definitionsbereiches und die Gleichung der senkrechten Asymptote von G_f.

7 **1.2** Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie die Art und die Koordinaten des absoluten Extrempunktes von G_f. Geben Sie auch die Wertemenge der Funktion f an. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$]

5 **1.3** Bestimmen Sie die exakte Gleichung der Wendetangente an den Graphen G_f.

4 **1.4** Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte im Bereich $0 < x \leq 5{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 2 cm

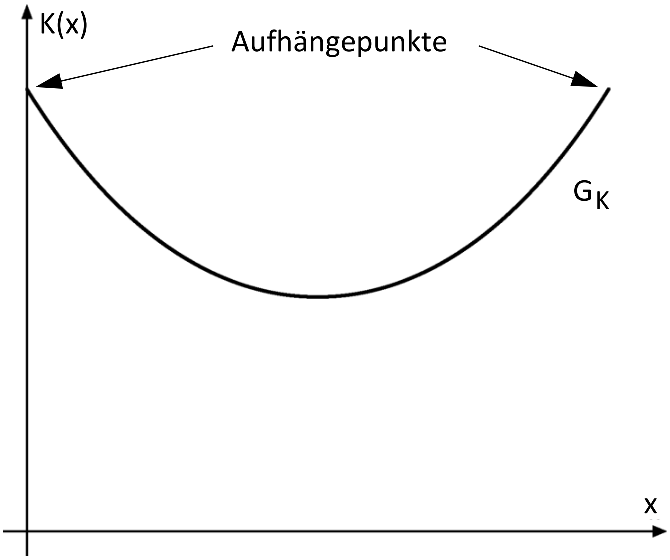
1.5.0 Gegeben ist die Funktion $F: x \mapsto x \cdot (\ln(x) - 1)^2$ mit der Definitionsmenge $D_F =]0;\infty[$.

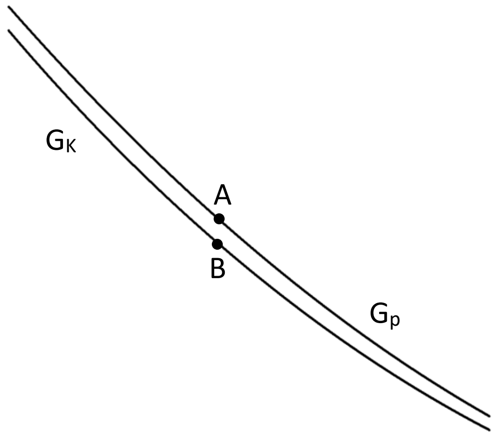
4 **1.5.1** Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.

4 **1.5.2** Der Graph G_f und die x-Achse schließen im vierten Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung aus Teilaufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
	2.0	Eine Kette ist an ihren Enden an zwei Punkten aufgehängt. Die beiden Aufhängepunkte haben einen waagrechten Abstand von 10 cm und sind auf gleicher Höhe angebracht. Der Verlauf der Kette wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem durch den Graphen G_K (siehe Abbildung) der Funktion K beschrieben. Die Funktion K ist dabei gegeben durch die Gleichung $K(x) = 2(e^{0,25x-1,25} + e^{-0,25x+1,25})$ mit $D_K = [0; 10]$. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Zentimeter. Auf die Mitführung der Einheiten kann verzichtet werden.
6	**2.1**	Ermitteln Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes der Kette und führen Sie den rechnerischen Nachweis, dass es sich dabei um einen lokalen Tiefpunkt handelt. [Mögliches Teilergebnis: $K'(x) = 0,5(e^{0,25x-1,25} - e^{-0,25x+1,25})$]
3	**2.2**	Der Kettenverlauf kann durch eine Parabel G_p angenähert werden, die durch den Punkt $Q(0\|7,554)$ und ihren Scheitelpunkt $S(5\|4)$ verläuft. Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen quadratischen Funktion p.
4	**2.3**	Die Parabel G_p verläuft für $x \in]0; 5[$ stets oberhalb des Graphen G_K. In diesem Bereich wird der Abstand der senkrecht übereinander liegenden Punkte $A(x\|p(x)) \in G_p$ und $B(x\|K(x)) \in G_K$ betrachtet. Die Abbildung zeigt einen nicht maßstabsgerechten, vergrößerten Ausschnitt von G_p und G_K. Der größte dieser Abstände ist ein Maß dafür, wie gut die Parabel G_p den Graphen G_K im Bereich $0 < x < 5$ annähert. Beschreiben Sie, wie dieser größte Abstand rechnerisch bestimmt werden kann. Hinweis: Eine rechnerische Lösung soll nicht durchgeführt werden.
43		





BE

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind der Punkt $A(2|-1|-4)$ sowie die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu, k \in \mathbb{R}$ gegeben.

Es gilt $A \notin g$. Somit legen der Punkt A und die Gerade g eine Ebene E fest.

5 **1.1** Ermitteln Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Koordinatenform.
[Mögliches Teilergebnis: $E: x_1 - 2x_2 - 4 = 0$]

4 **1.2** Bestimmen Sie den Wert von k so, dass sich die Geraden g und h_k in einem Punkt S schneiden und berechnen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes S.

5 **1.3** Für $k = -4$ ergibt sich die Gerade $h_{-4}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die Gerade h_{-4} echt parallel zur Ebene E verläuft.

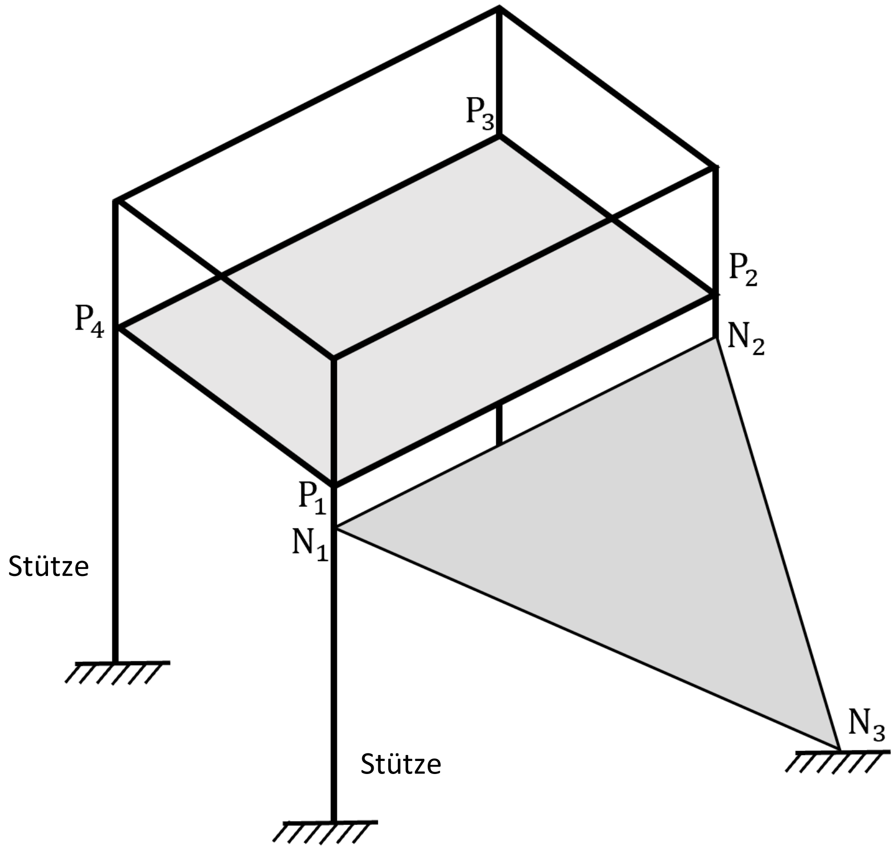
Fertigen Sie ohne Verwendung eines Koordinatensystems eine aussagekräftige Skizze an, aus der die gegenseitige Lage von E sowie der beiden Geraden h_{-4} und g klar hervorgeht.

Formulieren Sie die Lagebeziehung zwischen h_{-4} und g zusätzlich in Worten.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.0 Die Abbildung zeigt modellhaft einen Teil eines Klettergerüsts auf einem Spielplatz, das in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ beschrieben wird. Die Fußpunkte der Stützen des Klettergerüsts liegen in der x_1x_2-Ebene und dazu parallel die rechteckige Plattform $P_1P_2P_3P_4$. Über ein dreieckiges Netz, das an den Punkten N_1, N_2 und N_3 fixiert ist, können die Kinder auf die Plattform $P_1P_2P_3P_4$ klettern. Folgende Punkte sind gegeben: $P_1(1{,}8|1{,}2|1{,}5)$, $P_2(0|1{,}2|1{,}5)$, $P_3(0|0|1{,}5)$ und $N_3(0{,}9|3{,}6|0)$. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung der Einheiten kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.



2 **2.1** Geben Sie die Koordinaten des Punktes P_4 an.

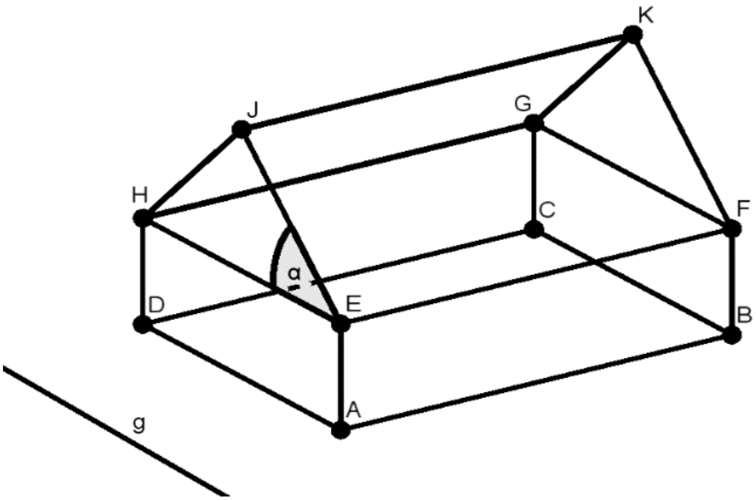
4 **2.2** Das Netz ist in den Punkten N_1 und N_2 befestigt, die jeweils 10 cm senkrecht unter den Punkten P_1 und P_2 liegen. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Netzes.

3 **2.3** Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Netz und der x_1x_2-Ebene.

23

BE

1.0 Eine Architektin plant den Bau eines einstöckigen Hauses. Dazu stellt sie das Haus modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ dar. Im Modell wird das Haus aus einem Quader und einem dreiseitigen, geraden Prisma zusammengesetzt. Gegeben sind die Punkte A(2|2|0), B(10|10|0), C(4|16|0) und J(−1|5|7). Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Die Deckenhöhe im Erdgeschoss beträgt 3 m. Bei den Rechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.



4 **1.1** Zeigen Sie, dass der Punkt D die Koordinaten (−4|8|0) besitzt. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Grundfläche ABCD des geplanten Hauses im Punkt B rechtwinklig ist.

3 **1.2** Eine Grundstücksgrenze des Baugrundstückes verläuft entlang der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$. Die Punkte A und D liegen auf der Geraden h. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

4 **1.3** Ermitteln Sie die Maßzahl des Gesamtvolumens des Hauses.

3 **1.4** Für den Dachneigungswinkel α (siehe 1.0) gilt gemäß der örtlichen Bauvorschrift $30° \le \alpha \le 45°$. Zeigen Sie, dass der Dachneigungswinkel die Bauvorschrift erfüllt.

5 **1.5** Im Dachgeschoss soll eine Zwischendecke eingezogen werden, die parallel zur Grundfläche und einen Meter tiefer als der First $\overline{JK}$ ist. Diese Zwischendecke liegt in der Ebene Z. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene Z mit der durch EFKJ gegebenen Ebene.

4 **1.6** Zur Bewässerung des Gartens soll Regenwasser, das auf das Hausdach trifft, in einer Zisterne gesammelt werden. Gemäß statistischer Daten der letzten Jahrzehnte ist die durchschnittliche gesamte Niederschlagsmenge im sonnenreichen Juli $101\frac{\ell}{m^2}$. Zur Bewässerung des 113 m^2 großen Gartens sind zusätzlich täglich $2{,}5\frac{\ell}{m^2}$ notwendig. Entscheiden Sie mithilfe einer Rechnung, ob die Bewässerung im Monat Juli gemäß der statistischen Daten durchgeführt werden kann. Vereinfachend wird von störenden Einflüssen wie etwa Wind abgesehen und angenommen, dass der Regen parallel zur x_3-Achse fällt.

23