Abiturprüfung 2022

zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 31. Mai 2022, 09:00 Uhr – 10:00 Uhr

Mathematik

Ausbildungsrichtung Technik

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{2x}{4-x^2}$ mit der Definitionsmenge $D_f =]-2; 2[$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

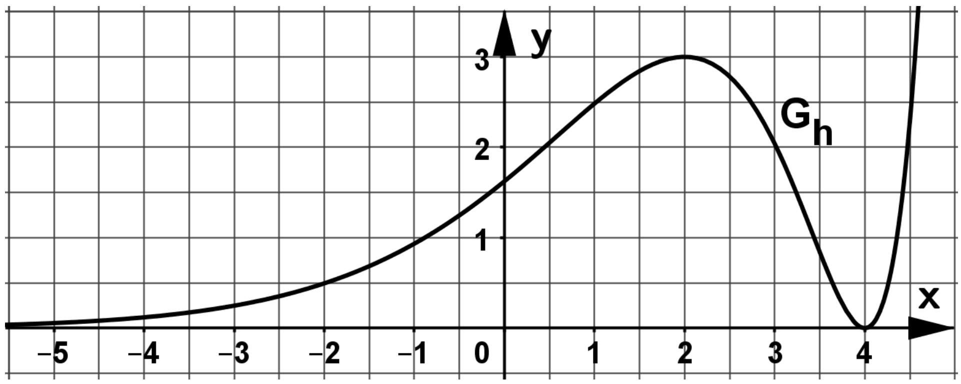
2 **1.1** Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f und die Nullstelle von f an.

6 **1.2** Weisen Sie nach, dass die Funktion f in ihrer Definitionsmenge D_f umkehrbar ist, und ermitteln Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion von f.

4 **1.3** Der Graph von f und die zur x-Achse senkrechte Gerade bei $x = 1$ schließen zusammen mit der x-Achse im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

5 **1.4** Gegeben ist nun die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x))$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset D_f$. Ermitteln Sie die Definitionsmenge D_g und die exakte Nullstelle von g.

5 **2** Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer in $\mathbb{R}$ stetigen Funktion h. Die x-Achse ist Asymptote von G_h. Außerdem gilt: $h(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$.



Zudem ist die Funktion $H: x \mapsto \int_2^x h(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_H = \mathbb{R}$ gegeben.

Entscheiden Sie für die beiden folgenden Aussagen jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

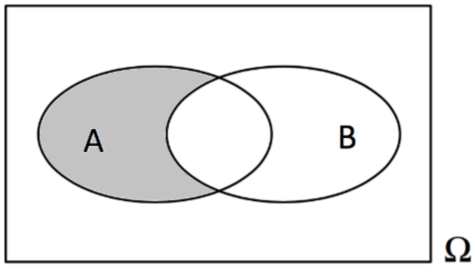
A: „Der Graph von H besitzt bei $x = 4$ einen Extrempunkt."

B: „Der Graph von H hat bei $x = 1$ eine Tangente mit einem positiven y-Achsenabschnitt."

22

BE

3 **1** A und B sind vereinbare Ereignisse des Ergebnisraums Ω.



a) Geben Sie das im nebenstehenden Venn-Diagramm grau markierte Ereignis E_1 möglichst einfach als Verknüpfung der Ereignisse A und B an.

b) Veranschaulichen Sie das Ereignis $E_2 = A \cup \overline{B}$ in einem Venn-Diagramm.

2.0 Ein Handballspieler trainiert Siebenmeter-Würfe, wobei der Torhüter seines Vereins im Tor steht.
Erfahrungsgemäß trifft er bei $80\,\%$ seiner Würfe ins Tor.

3 **2.1** Der Spieler führt zwei Siebenmeter-Würfe aus.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E_3: „Der Spieler trifft jedes Mal.“

E_4: „Der Spieler trifft mindestens einmal.“

2 **2.2** Formulieren Sie zwei Ereignisse E_5 und E_6 im Sachzusammenhang, deren Wahrscheinlichkeiten sich wie folgt berechnen lassen:

$P(E_5) = 0{,}8^{20}$

$P(E_6) = \binom{50}{30} \cdot 0{,}8^{30} \cdot 0{,}2^{20}$

4 **3** Einer Gruppe von fünf Jugendlichen werden zwei Freikarten für ein Rockkonzert zur Verfügung gestellt. Um diese zu verteilen, werden nacheinander Lose gezogen, ohne diese zurückzulegen. Jeder Jugendliche zieht dabei genau einmal. Neben den zwei Gewinnlosen für die Freikarten befinden sich drei Nieten in der Lostrommel.

Entscheiden Sie unter Zuhilfenahme einer geeigneten Rechnung, ob der Zweite, der zieht, die gleiche Chance auf eine Freikarte hat wie der Erste.

12

FOSBOS

Abiturprüfung 2022

zum Erwerb der fachgebundenen Hochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 31. Mai 2022, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

Mathematik

Ausbildungsrichtung Technik - CAS

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \arctan\left(1 - \frac{2}{5x}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

4 **1.1** Berechnen Sie die Nullstelle von f. Bestimmen Sie außerdem das Verhalten der Funktionswerte von f an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichung der Asymptote von G_f an.

5 **1.2** Ermitteln Sie **ohne CAS** das Steigungsverhalten des Graphen von f und geben Sie die Wertemenge von f an.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{1}{5x^2 - 2x + 0{,}4}$]

4 **1.3** Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_f.

2.0 Gegeben ist die Funktion $u: x \mapsto \frac{2 \cdot \ln(x)}{\ln(x) - 1}$ mit der größtmöglichen Definitionsmenge $D_u \subset \mathbb{R}$.

7 **2.1** Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_u und die Nullstelle von u. Ermitteln Sie außerdem **ohne CAS** das Monotonieverhalten des Graphen von u.

[Mögliches Teilergebnis: $u'(x) = \frac{-2}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2}$]

5 **2.2** Die Funktion u ist umkehrbar (Nachweis ist nicht erforderlich). Die Umkehrfunktion wird mit u^{-1} bezeichnet. Ermitteln Sie **ohne CAS** eine Gleichung der Geraden, die den Graphen von u^{-1} im Punkt $P^*(4|?)$ berührt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3.0 Gegeben sind die Funktionen $h: x \mapsto \frac{12x^2 - 14x}{(2x-3)(3x+1)}$ und $H: x \mapsto \int_0^x h(t)\,dt$ mit den jeweils maximalen Definitionsmengen $D_h \subset \mathbb{R}$ und $D_H \subset \mathbb{R}$.

7 **3.1** Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von H, sowie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von $H(x)$ jeweils Art und x-Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen von H.

7 **3.2** Zeigen Sie, dass $h(x)$ auch in der Form $\frac{6}{(2x-3)(3x+1)} + 2$ dargestellt werden kann. Ermitteln Sie anschließend **ohne CAS** eine integralfreie Darstellung von H.

4 **4** Weinkenner sind davon überzeugt, dass je nach Weinsorte die passende Weintemperatur wichtig für den Genuss des Weins ist. So soll zum Beispiel Rotwein bei Raumtemperatur genossen werden. Mit einem Wein-Thermometer wird in einem Raum die Temperatur des Weins gemessen, die niedriger als die Raumtemperatur ist. In dieser Aufgabe zeigt das Wein-Thermometer unmittelbar vor dem Eintauchen in den Wein die Raumtemperatur von $20\,°C$ an. Nach dem Eintauchen in den Wein wird es erst allmählich die Weintemperatur T_W anzeigen. Sowohl die Raumtemperatur als auch die Weintemperatur sind während der Messung als konstant zu betrachten.

Die vom Wein-Thermometer in der Einheit $°C$ angezeigte Temperatur $T(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t (gemessen in Sekunden ab dem Zeitpunkt $t = 0$ des Eintauchens) lässt sich durch die Differenzialgleichung $\dot{T} = -\lambda \cdot (T - T_W)$ beschreiben, wobei $\lambda > 0$ ein reeller Parameter ist. Auf das Mitführen der Einheiten wird im Folgenden verzichtet.

Zeigen Sie **ohne CAS**, dass die Funktion $T_D: t \mapsto D \cdot e^{-\lambda \cdot t} + T_W$ für jeden Wert von $D \in \mathbb{R}$ eine Lösung der obigen Differenzialgleichung ist, und begründen Sie, warum in der vorliegenden Situation $D = 20 - T_W$ gelten muss.

43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln\left(4 - \frac{8x}{x^2+1}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f =]-\infty; 1[$. Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

5 **1.1** Ermitteln Sie die Nullstelle von f und die Gleichungen aller Asymptoten von G_f.

7 **1.2** Bestimmen Sie **ohne CAS** die Wertemenge von f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{2 \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x^2+1)}$]

3 **1.3** Die Funktion u mit $u(x) = f(x)$ und $D_u = [0; 1[$ ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von u.

2.0 Nun wird die Funktion $h: x \mapsto \int_{0,6}^{x} \frac{3}{(5t-1)^2 + 4}\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ betrachtet.

3 **2.1** Ermitteln Sie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von h die Anzahl und die Lage der Nullstellen von h.

6 **2.2** Ermitteln Sie **ohne CAS** eine integralfreie Darstellung von h.

3.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{2}{2e^{-x}+1} - 1$ mit der Definitionsmenge $D_g = [0; +\infty[$. Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

6 **3.1** Begründen Sie **ohne CAS** für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind.

A: „Der Graph von g hat bei $x = 0$ einen absoluten Extrempunkt."

B: „Die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ ist Asymptote von G_g."

[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \frac{4e^{-x}}{(2e^{-x}+1)^2}$]

4 **3.2** Ermitteln Sie eine Gleichung der Wendetangente von G_g.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
5	**3.3**	Die Funktion g ist umkehrbar (Nachweis ist nicht erforderlich). Die Tangente t berührt den Graphen der Umkehrfunktion von g im Punkt $P^*(\frac{1}{2}\,|\,?)$. Ermitteln Sie **ohne CAS** die Steigung von t.
4	**4**	Auf einen bestimmten Körper wirkt zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ seit Beobachtungsbeginn $(t = 0)$ eine konstante Kraft. Außerdem wirkt auf den Körper eine Reibungskraft, die proportional zum Quadrat der Momentangeschwindigkeit $v(t)$ des Körpers ist. Es gilt modellhaft die Differenzialgleichung $5\dot{v} = 50 - 2v^2$. Die Geschwindigkeit wird in $\frac{m}{s}$, die Zeit in s angegeben. Bei den folgenden Berechnungen darf auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden. Untersuchen Sie **ohne CAS**, ob die Funktion v mit der Gleichung $v(t) = 5 \cdot \frac{e^{4 \cdot t} - 1}{e^{4 \cdot t} + 1}$ eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung ist.
43		

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Telekommunikationsunternehmen bietet verschiedene Internetverträge an. Die Kunden können beim Vertragsabschluss zwischen den Tarifen „Basic“ (B) und „Highspeed“ (H) wählen. Zudem können sie beschließen, ob sie einen neuen Router bei diesem Unternehmen mitbestellen (R) oder sich anderweitig einen Router organisieren wollen ($\overline{R}$). Falls sie sich für die Router-Bestellung entscheiden, können sie noch zusätzlich bestimmen, ob sie den Router selbst installieren (S), einen Techniker hiermit beauftragen (T) oder sogar einen Komplettservice (K) wählen, bei dem auch die Endgeräte der Kunden durch Mitarbeiter des Unternehmens gleich angebunden werden.

Erfahrungsgemäß nehmen $60\,\%$ der Kunden den „Basic“-Tarif. Unabhängig von der Tarifwahl entscheiden sich $80\,\%$ der Kunden dafür, einen Router mitzubestellen. Von diesen Kunden will stets die Hälfte den Router selbst installieren. Kunden, die den „Basic“-Tarif mit Router wählen, möchten zu gleichen Anteilen einen Techniker kommen lassen oder den Komplettservice. Von den Kunden mit „Highspeed“-Tarif und Router möchten $40\,\%$ den Komplettservice.

Die zufällige Auswahl eines Kunden mit der Analyse seiner Vertragsoptionen wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

5 **1.1** Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments.

[Teilergebnis: $P\left(\left\{\left(H;R;K\right)\right\}\right)=0{,}128$]

3 **1.2** Gegeben sind folgende Ereignisse:

E_1: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ordert keinen firmeneigenen Router oder verlangt beim Wunsch nach einem firmeneigenen Router keinen Komplettservice.“

$E_2=\left\{\left(B;R;K\right);\left(B;\overline{R}\right);\left(H;R;K\right);\left(H;\overline{R}\right)\right\}$

$E_3=E_1\cap E_2$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und formulieren Sie E_3 möglichst einfach im Sachzusammenhang. Berechnen Sie anschließend $P\left(E_3\right)$.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

5 **1.3** Beim Telekommunikationsunternehmen gehen von einigen Kunden Beschwerden ein, dass die Internetverbindung oft unterbrochen wird. Bei einer Problemanalyse der Internetverbindung bei allen Kunden des Unternehmens soll untersucht werden, ob die Verbindungsabbrüche mit dem verwendeten Router zusammenhängen (mitbestellter Router (R) oder anderweitig organisierter Router). Aus Unternehmensdaten geht hervor, dass die Internetverbindung bei $60\,\%$ aller Kunden ohne Unterbrechungen ($\overline{U}$) funktioniert. Die Hälfte aller Kunden hat eine unterbrechungsfreie Internetverbindung und einen beim Telekommunikationsunternehmen mitbestellten Router.
Es gilt weiterhin $P(R) = 0{,}8$.

Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten $P_R(U)$ und $P_{\overline{R}}(U)$, z. B. mithilfe einer Vierfeldertafel. Formulieren Sie im Sinne des vorliegenden Sachzusammenhangs eine Aussage in Worten, in der Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten $P_R(U)$ und $P_{\overline{R}}(U)$ miteinander vergleichen.

6 **2** In einer bestimmten Region Deutschlands sind vier verschiedene Arten von DSL-Internetanschlüssen verfügbar, wobei pro Haushalt nur genau eine der vier möglichen Anschlussarten gewählt werden kann. Die Tabelle veranschaulicht die Verteilung der verschiedenen Anschlüsse unter denjenigen Haushalten mit DSL-Anschluss:

Haushalte mit DSL 2000	Haushalte mit DSL 6000	Haushalte mit DSL 16000	Haushalte mit DSL 50000
17,3 %	17,9 %	19,8 %	15,0 %

Im Auftrag eines Internetdienstanbieters soll eine Umfrage zur Internetnutzung durchgeführt werden. Zu diesem Zweck werden 25 Haushalte der Region zufällig ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_4: „Genau drei der ausgewählten Haushalte besitzen einen DSL 2000-Anschluss.“

E_5: „Mindestens sechs, aber weniger als zehn der ausgewählten Haushalte besitzen einen DSL 50000-Anschluss.“

E_6: „Weniger als die Hälfte der ausgewählten Haushalte verfügen über einen DSL-Internetanschluss.“

4 **3** Für ein Glücksspiel wird eine gezinkte Münze verwendet, bei der „Kopf“ mit der Wahrscheinlichkeit $40\,\%$ fällt. Man zahlt $4\,€$ Einsatz und wirft dreimal die Münze. Fällt dreimal Kopf, werden $20\,€$ ausbezahlt. Wenn immer abwechselnd Kopf und Zahl auftreten, erhält man $10\,€$. Sonst erfolgt keine Auszahlung.
Prüfen Sie, ob das Spiel für den Spieler günstig, fair oder ungünstig ist.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 In einer Gärtnerei werden drei Blumenarten gezüchtet und verkauft. Es handelt sich dabei um Tulpen (T), Osterglocken (O) und Krokusse (K). Während Krokusse ausschließlich aus Blumenzwiebeln (B) und Osterglocken ausschließlich aus Samen (S) gezüchtet werden, werden Tulpen sowohl aus Blumenzwiebeln als auch aus Samen erzeugt. Von allen drei Blumenarten werden gelbe (g) und weiße (w) zum Verkauf angeboten.

Die Hälfte aller verkauften Blumen sind Tulpen. Die beiden anderen Blumensorten werden jeweils zu gleichen Anteilen verkauft. Die aus Samen wachsenden Tulpen haben unter dieser Blumenart einen Verkaufsanteil von $40\,\%$. Unabhängig von Blumensorte und Züchtungsform werden $75\,\%$ aller verkauften Blumen mit der Farbe Gelb gewählt.

Der Kauf einer Blume hinsichtlich ihrer Eigenschaften Blumenart, Züchtungsform und Farbe wird im Folgenden als Zufallsexperiment mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten betrachtet.

5 **1.1** Erstellen Sie für das vorliegende Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und ermitteln Sie alle acht Elementarereignisse mit ihren Wahrscheinlichkeiten.

[Teilergebnis: $P(\{(T;B;g)\}) = 0{,}225$]

3 **1.2** Nun werden folgende Ereignisse betrachtet:

E_1: „Die verkaufte Blume ist gelb und ist keine Tulpe.“

$E_2 = \{(T;S;g);(T;S;w);(O;S;g);(O;S;w)\}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und formulieren Sie E_2 möglichst einfach im Sachzusammenhang. Berechnen Sie anschließend $P(E_2)$.

2.0 Im Gewächshaus der Gärtnerei werden in einem neu angelegten Beet 30 Tulpenzwiebeln nebeneinander eingesetzt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}85$ geht eine eingesetzte Tulpenzwiebel tatsächlich auf und es wächst daraus eine Tulpe.

2 **2.1** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aus genau 25 der eingesetzten Zwiebeln Tulpen entstehen.

2 **2.2** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_3: „Genau zwei der Zwiebeln gehen nicht auf und diese wurden direkt nebeneinander eingesetzt.“

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

4 **2.3** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aus mindestens 29 der eingesetzten Zwiebeln Tulpen entstehen. Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage für alle Werte von k mit $1 \leq k \leq 29$ wahr ist:

„Die Wahrscheinlichkeit, dass aus 30 eingesetzten Tulpenzwiebeln mindestens k Tulpen entstehen, liegt nicht unter $4\,\%$."

3.0 Für eine Zufallsgröße X ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $a, b \in \mathbb{R}$ durch folgende Tabelle vollständig gegeben:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	a	2b	b	0,1	0,1	0,04

3 **3.1** Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b, wenn der Erwartungswert von X gleich 1,7 ist.

[Teilergebnis: $b = 0{,}2$]

4 **3.2** Die Blumensorte Tulpe erzeugt während ihres Wachstums sogenannte Tochterzwiebeln, die ihrerseits wieder zur Entstehung weiterer Tulpen führen. Die unter 3.0 aufgeführte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den unter Aufgabe 3.1 bestimmten Werten für a und b gibt an, welche Anzahl von Tochterzwiebeln mit welcher Wahrscheinlichkeit auftritt.

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

23