Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2022

Prüfungsfach:	**Mathematik** **(nichttechnische Ausbildungsrichtungen)**
Prüfungstag:	**Donnerstag, 02. Juni 2022**
Prüfungsdauer:	**9:00 Uhr – 12:00 Uhr**
Hilfsmittel:	**elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner;** **Merkhilfe LPPLUS Mathematik (Technik)**
Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule. Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.
Bewertungsschlüssel:	

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

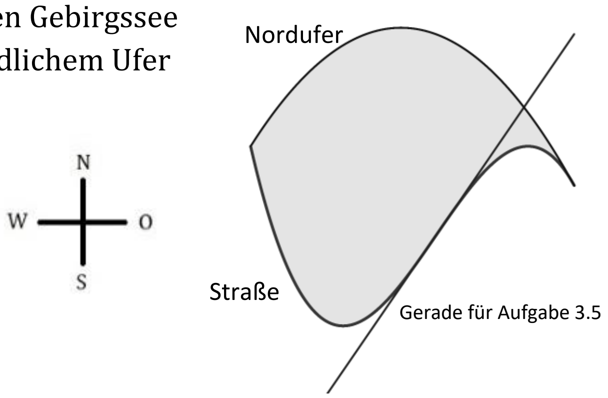
Aufgabe I

		BE
1.0	Der Graph einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathrm{IR}$ verläuft durch den Koordinatenursprung, ist achsensymmetrisch zur y-Achse und hat einen Wendepunkt bei $W_1\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{20}{9}\right)$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.	
1.1	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f. [mögliches Ergebnis: $f(x) = -x^4 + 4x^2$]	**5**
1.2	Berechnen Sie die Nullstellen von f.	**2**
1.3	Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f.	**5**
1.4	Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ mithilfe bereits vorliegender und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Koordinatenachsen: 1 LE $\widehat{=}$ 2 cm	**3**
1.5.0	Weiter ist die quadratische Funktion p mit der Funktionsgleichung $p(x) = 2x^2 + 1$ und dem Definitionsbereich $D_p = \mathrm{IR}$ gegeben. Der Graph der Funktion p wird mit G_p bezeichnet.	
1.5.1	Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen G_p und G_f.	**4**
1.5.2	Zeichnen Sie die Parabel G_p in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.4 im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ ein.	**2**
1.5.3	Die Graphen G_f und G_p schließen im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Teilaufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts.	**4**
		25

Aufgabe II

		BE
2.0	Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f dritten Grades mit $D_f = \mathbb{IR}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet und schneidet die x-Achse an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 4$. Zudem liegt der Punkt $A(1\|0{,}75)$ auf dem Graphen G_f.	
2.1	Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion f. Geben Sie diese auch in der allgemeinen Form an. [mögliches Ergebnis: $f(x) = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 2x$]	3
2.2	Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.	5
2.3.0	Gegeben ist eine zweite ganzrationale Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}25x^3 - x$ und der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{IR}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.	
2.3.1	Zeigen Sie, dass folgender Zusammenhang gilt: $g(x-2) = f(x)$	3
2.3.2	Beschreiben Sie, wie Art und Koordinaten der Extrema von G_g, sowie die Nullstellen der Funktion g ohne weitere Rechnung ermittelt werden können und geben Sie alle entsprechenden Werte an.	3
2.3.3	Geben Sie das Symmetrieverhalten von G_g (Punktsymmetrie zum Ursprung bzw. Achsensymmetrie zur y-Achse) begründet an und ziehen Sie daraus Rückschlüsse auf das Symmetrieverhalten von G_f.	2
2.3.4	Zeichnen Sie die beiden Funktionsgraphen G_g und G_f unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und ggf. weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Koordinatenachsen: $1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 2\text{cm}$.	5
2.3.5	G_f und G_g schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Teilaufgabe 2.3.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. Hinweis: Die Integrationsgrenzen dürfen der Zeichnung aus 2.3.4 entnommen werden.	4
		25

Aufgabe III

		BE
3.0	Nebenstehende Skizze zeigt einen Gebirgssee (vgl. graue Fläche) an dessen südlichem Ufer eine Straße verläuft.  Diese Straße wird durch den Graphen der Funktion f mit folgender Funktionsgleichung beschrieben: $f(x) = -0{,}125\,x^3 + 0{,}75\,x^2 - 3{,}125$ mit $D_f = [-2; 5]$ Weiter befindet sich am Punkt $P(-2\|f(-2))$ ein Parkplatz. Das Nordufer des Sees wird näherungsweise durch den Graphen der Funktion p mit der Funktionsgleichung $p(x) = -0{,}25x^2 + 0{,}625x + 3{,}125$ mit $D_p = [-2; 5]$ dargestellt. Auf die Verwendung von Einheiten wird verzichtet.	
3.1	Ermitteln Sie die Koordinaten des südlichsten und der beiden nördlichsten Punkte der Straße.	6
3.2	Ein PKW-Fahrer fährt vom Parkplatz kommend auf der Straße südlich am Gebirgssee entlang. Dabei durchfährt der Fahrer zuerst eine Linkskurve und dann eine Rechtskurve. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes G, an welchem die Linkskurve in die Rechtskurve übergeht. [mögliches Teilergebnis: $G(2\|f(2))$]	3
3.3	Zeichnen Sie die Graphen G_f und G_p unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. Zeichnen Sie auch die Punkte P und G ein.	4

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

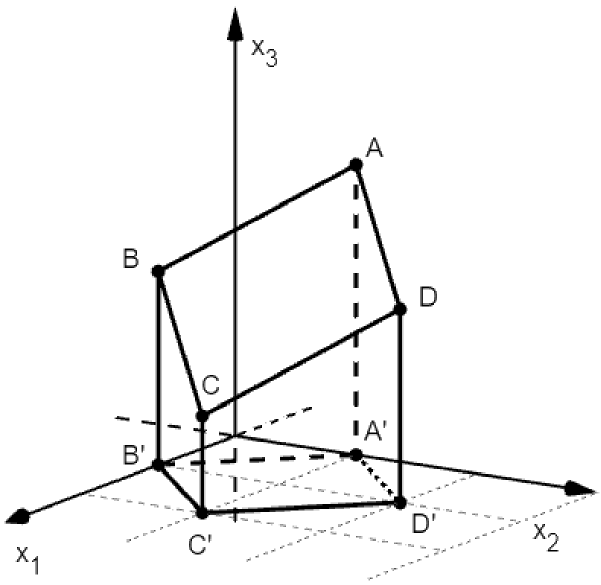
Aufgabe III (Fortsetzung)

		BE
3.4	Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts, welcher von der Straße im Süden und vom Nordufer komplett eingeschlossen wird. Hinweise: Die Integrationsgrenzen können der Zeichnung aus 3.3 entnommen werden. Runden Sie Ihr Ergebnis auf eine ganze Zahl.	**4**
3.5	Aufgrund des hohen Verkehrsaufkommens wird eine neue, geradlinige Brücke über den See gebaut, welche im Punkt G beginnt und in diesem Punkt tangential zur Straße verläuft (siehe Abbildung 3.0). Geben Sie die Gleichung der Geraden g an, welche den Verlauf der Brücke beschreibt.	**3**
3.6	Es soll nun ein Fahrradweg entlang der Straße gebaut werden. Der Verlauf soll dem der Straße, dargestellt durch G_f, entsprechen, allerdings in jedem Punkt 0,875 LE südlich (in y-Richtung) versetzt werden. Zeigen Sie mittels passender Termumformungen, dass der Streckenverlauf des Fahrradwegs durch den Graphen G_h der Funktion h mit $h(x) = -0{,}125\,(x+2)(x-4)^2$ veranschaulicht werden kann.	**5**
		25

Aufgabe IV

		BE
4.0	In einem Freizeitpark soll eine neue Achterbahn errichtet werden. Der Verlauf eines Teilstücks dieser Achterbahn im Querschnitt wird durch folgende Funktionsgleichung dritten Grades beschrieben: $g(x) = \frac{1}{50}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + 8x \quad \text{mit } D_g = [0; 24]$ Ein Wasserbecken befindet sich im Bereich $16 \leq x \leq 24$, dessen Wasseroberfläche durch einen Teilabschnitt der x-Achse dargestellt wird. Die Koordinaten x und y sind als Längenangaben in der Einheit Meter zu interpretieren. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.	
4.1	Zeichnen Sie den Teilabschnitt der Achterbahn aus 4.0 unter Verwendung geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. Markieren Sie auch die Wasseroberfläche des Wasserbeckens. [Maßstab: x-Achse: 1 cm $\widehat{=}$ 2 m; y-Achse: 1 cm $\widehat{=}$ 2 m]	5
4.2	Zeigen Sie rechnerisch, dass die gegebene Bahn nicht unter Wasser verläuft, sondern die Wasseroberfläche nur berührt.	4
4.3	Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punktes und der tiefsten Punkte bei der Fahrt auf dem Teilabschnitt der gegebenen Bahn und markieren Sie diese Punkte in Ihrer Zeichnung in 4.1. [mögliches Teilergebnis: $g'(x) = 0{,}06x^2 - 1{,}6x + 8$]	6
4.4	Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Wendepunktes, sowie den Wert der ersten Ableitung an dieser Stelle und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.	5
4.5	Zur Durchführung von Wartungsarbeiten soll die Fläche unter der Bahn im Bereich $0 \leq x \leq 7$ mit einem Gerüst versehen werden. Der Boden wird durch die x-Achse beschrieben. Der Gerüstbauer veranschlagt pro Quadratmeter 8,60 Euro. Kennzeichen Sie die Fläche, welche mit einem Gerüst versehen werden soll, in Ihrer Zeichnung in 4.1 und berechnen Sie dann die Gesamtkosten für dieses Gerüst.	5
		25

Aufgabe V

		BE
5.0	Auf dem Pausenhof eines Schulhauses wird ein Kletterturm geplant. Dieser wird in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ modellhaft dargestellt (vgl. nicht maßstabsgetreue Skizze unten). Die quadratische Grundfläche $A'B'C'D'$ liegt in der x_1x_2-Ebene. Die Eckpunkte des Vierecks ABCD haben die Koordinaten $A(0\|2\|6)$ $B(2\|0\|4)$ $C(4\|2\|2)$ $D(2\|4\|4)$. Die Kanten des Turms (z. B. AA') verlaufen senkrecht zur Grundfläche. Alle Längeneinheiten sind in der Einheit Meter angegeben. Bei den folgenden Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen. 	
5.1	Damit der Turm optisch ansprechend wirkt, sollen alle Seiten des Vierecks ABCD gleich lang sein. Berechnen Sie deren Länge und zeigen Sie damit, dass diese Bedingung erfüllt ist.	3
5.2	Bei dem Viereck ABCD stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Weisen Sie diese Aussage nach.	3
5.3	Es ist geplant, die Fläche ABCD mit Solarzellen zu versehen. Ermitteln Sie zu diesem Zweck rechnerisch den Flächeninhalt dieser Fläche.	3

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe V (Fortsetzung)

		BE
5.4	In der Mitte M der Fläche ABCD soll eine Befestigungsschraube für die Solarzellen angebracht werden. Berechnen Sie die Koordinaten des nötigen Bohrloches M.	3
5.5	Damit im Winter kein Schnee auf den Solarzellen liegen bleibt und deren Leistung nicht beeinträchtigt wird, soll die Maßzahl des Winkels ∢CAA' maximal 48° betragen. Prüfen Sie rechnerisch, ob diese Vorgabe erfüllt ist.	4
5.6	Weiter ist geplant, die senkrechten Seitenkanten des Turms mit einem Kantenschutz aus Edelstahlprofilen zu versehen. Ein Meter dieser Profile kostet 20 €. Berechnen Sie die dafür vorzuhaltenden Kosten.	3
5.7	Die trapezförmigen Seitenwände des Kletterturms werden mit Holzlochplatten verkleidet. Die Kosten für diese Platten betragen 50 € pro Quadratmeter. Ermitteln Sie die Gesamtkosten für diese Holzplatten, wenn wegen Verschnitt mit einem Aufschlag von 15 % gerechnet werden muss.	6
		25