Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2022

Prüfungsfach: **Mathematik**
(technische Ausbildungsrichtungen)

Prüfungstag: **Donnerstag, 02. Juni 2022**

Prüfungsdauer: **9:00 Uhr – 12:00 Uhr**

Hilfsmittel: **elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner;**
Merkhilfe LPPLUS Mathematik (Technik)

Hinweise:

Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.
Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.
Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.

Bewertungsschlüssel:

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

Aufgabe I

		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion h mit ihrer Funktionsgleichung $$h(x) = 24 \cdot \frac{x+3}{2x^2}$$ auf der maximalen Definitionsmenge D_h. Der Graph der Funktion h in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_h.	
1.1	Geben Sie die Definitionsmenge D_h an und bestimmen Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte von G_h mit den Koordinatenachsen.	**3**
1.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ sowie in der Umgebung der Definitionslücke. Geben Sie Art und Gleichung der Asymptoten von G_h an.	**3**
1.3	Bestimmen Sie rechnerisch Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_h. [mögliches Zwischenergebnis: $h'(x) = \frac{-12x-72}{x^3}$]	**5**
1.4	Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von h.	**3**
1.5	Zeichnen Sie den Graphen G_h unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $-10 \leq x \leq 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem. [Maßstab: x-Achse: 1 cm $\widehat{=}$ 2 LE; y-Achse: 1 cm $\widehat{=}$ 2 LE]	**5**
1.6.0	Weiter ist die Funktion H mit $$H(x) = 12 \cdot \ln(x) - \frac{36}{x} + 5 \text{ mit } D_H = \mathrm{IR}^+$$ gegeben.	
1.6.1	Zeigen Sie, dass $H(x)$ eine Stammfunktion von $h(x)$ ist.	**3**
1.6.2	Der Graph G_h, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = 4$ und $x = 6$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung aus Aufgabe 1.5 und berechnen Sie die Maßzahl dessen Flächeninhalts.	**3**
		25

Aufgabe II

		BE
2.0	Gegeben ist die reelle Funktion f mit ihrer maximalen Definitionsmenge D_f durch ihre Funktionsgleichung: $$f(x) = -(x+1) \cdot \ln(x+1)$$ Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.	
2.1	Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_f und die Nullstelle der Funktion f.	**3**
2.2	Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge D_f an.	**3**
2.3	Bestimmen Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_f und ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen. [mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = -\ln(x+1) - 1$]	**6**
2.4	Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-1 < x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. [Maßstab: x-Achse: 2 cm $\widehat{=}$ 1 LE; y-Achse: 2 cm $\widehat{=}$ 1LE]	**5**
2.5	Zeigen Sie, dass die Funktion F, gegeben durch ihre Funktionsgleichung F(x) mit $$F(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 \cdot \ln(x+1) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{für } x > -1$$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.	**4**
2.6	Der Graph G_f, die x-Achse und die Gerade $x = 1$ schließen im 4. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie das Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Aufgabe 2.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche.	**4**
		25

Aufgabe III

		BE
3.0	Der Abkühlungsprozess eines bestimmten Spritzgussteils lässt sich mit Hilfe einer Exponentialfunktion des Typs $$f(t) = a \cdot e^{-k \cdot t} + 40$$ beschreiben, wobei $a, k \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt: $D_f = \mathbb{R}_0^+$. Der Graph der Funktion wird mit G_f bezeichnet. t gibt die Abkühlzeit in Sekunden nach Beginn des Spritzvorgangs zur Zeit $t = 0$ an. Der Funktionswert $f(t)$ ist die zum Zeitpunkt t herrschende Temperatur in °C. Folgende Messwerte werden ermittelt: Zeit t in s: 1 | 5 Temperatur f in °C: 175,09 | 100,70 Die Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden. Auf das Mitführen von Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.	
3.1	Ermitteln Sie mit Hilfe der gegebenen Bedingungen den Funktionsterm der Abkühlungskurve des Spritzgussteils. [mögliches Ergebnis: $f(t) = 165 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} + 40$]	**5**
3.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f an den Rändern des Definitionsbereichs und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang. Geben Sie zudem die Gleichung der waagrechten Asymptote an.	**4**
3.3	Die Entnahme des Werkstücks aus der Gussform lässt sich ab einer Temperatur von unter 62 °C problemlos vornehmen. Berechnen Sie den frühesten Zeitpunkt t_1 in Sekunden, ab dem das Werkstück entnommen werden kann.	**3**
3.4	Zeichnen Sie den Graphen G_f der Funktion f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $0 \leq t \leq 15$, sowie die Asymptote in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie dazu einen geeigneten Maßstab.	**4**
3.5	Die momentane Abkühlgeschwindigkeit v in $\frac{°C}{s}$ lässt sich als Steigung des Graphen der Funktion f beschreiben. Geben Sie jeweils den Betrag der Abkühlgeschwindigkeit eine Sekunde nach Beginn des Spritzvorgangs sowie zum Zeitpunkt $t = 10$ an. [mögliches Teilergebnis: $f'(t) = -33 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$]	**3**

Zeit t in s	1	5
Temperatur f in °C	175,09	100,70

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe III (Fortsetzung)

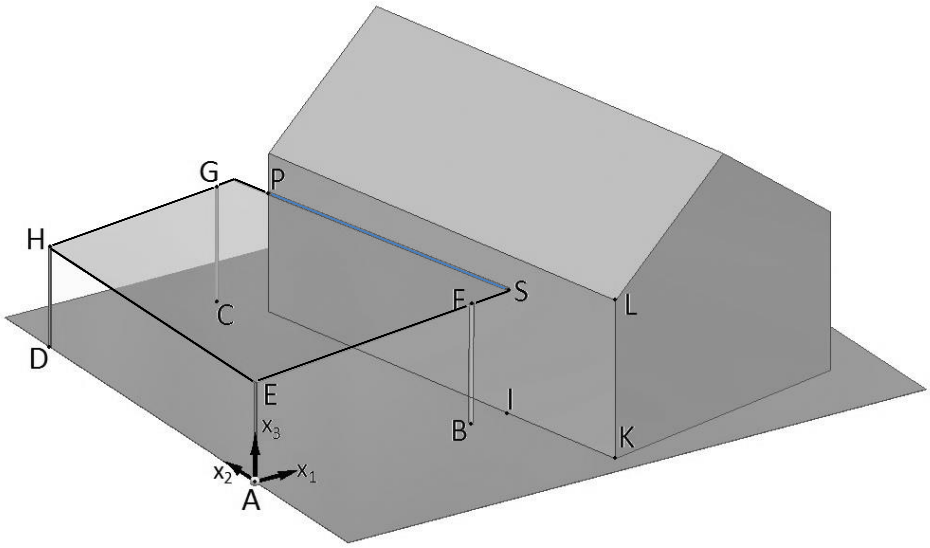
		BE
3.6	Die Punkte $P(0\|f(0))$ und $Q(10\|f(10))$ liegen auf dem Graphen G_f. Berechnen Sie die Steigung m der Geraden, welche durch P und Q verläuft und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. [mögliches Teilergebnis: $m = -14{,}27$]	**3**
3.7	Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f keinen Wendepunkt besitzt. Geben Sie den Zeitpunkt t_3 an, zu dem der Betrag der Abkühlgeschwindigkeit maximal ist.	**3**
		25

Aufgabe IV

		BE
4.0	In einem Freizeitpark soll eine neue Achterbahn errichtet werden. Der Verlauf eines Teilstücks dieser Achterbahn im Querschnitt wird durch folgende Funktionsgleichung dritten Grades beschrieben: $$g(x) = \frac{1}{50}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + 8x \quad \text{mit } D_g = [0; 24]$$ Ein Wasserbecken befindet sich im Bereich $16 \leq x \leq 24$, dessen Wasseroberfläche durch einen Teilabschnitt der x-Achse dargestellt wird. Die Koordinaten x und y sind als Längenangaben in der Einheit Meter zu interpretieren. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.	
4.1	Zeichnen Sie den Teilabschnitt der Achterbahn aus 4.0 unter Verwendung geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. Markieren Sie auch die Wasseroberfläche des Wasserbeckens. [Maßstab: x-Achse: 1 cm ≙ 2 m; y-Achse: 1 cm ≙ 2 m]	5
4.2	Zeigen Sie rechnerisch, dass die gegebene Bahn nicht unter Wasser verläuft, sondern die Wasseroberfläche nur berührt.	4
4.3	Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punktes und der tiefsten Punkte bei der Fahrt auf dem Teilabschnitt der gegebenen Bahn und markieren Sie diese Punkte in Ihrer Zeichnung in 4.1. [mögliches Teilergebnis: $g'(x) = 0{,}06x^2 - 1{,}6x + 8$]	6
4.4	Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Wendepunktes, sowie den Wert der ersten Ableitung an dieser Stelle und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.	5
4.5	Zur Durchführung von Wartungsarbeiten soll die Fläche unter der Bahn im Bereich $0 \leq x \leq 7$ mit einem Gerüst versehen werden. Der Boden wird durch die x-Achse beschrieben. Der Gerüstbauer veranschlagt pro Quadratmeter 8,60 Euro. Kennzeichen Sie die Fläche, welche mit einem Gerüst versehen werden soll, in Ihrer Zeichnung in 4.1 und berechnen Sie dann die Gesamtkosten für dieses Gerüst.	5
		25

Aufgabe V

		BE
5.0	An ein Einfamilienhaus wurde ein Carport angebaut (vgl. Abb.).	



Folgende Koordinaten sind im IR^3 bekannt:

$A(0\|0\|0)$	$B(6{,}8\|0\|0)$	$C(5{,}25\|10\|0)$	$D(0\|10\|0)$
$E(0\|0\|2{,}9)$	$F(6{,}8\|0\|3{,}5)$	$G(5{,}25\|10\|x_3)$	$H(0\|10\|2{,}9)$
$I(8\|0\|0)$	$K(8{,}84\|-3{,}91\|0)$	$L(8{,}84\|-3{,}91\|4{,}61)$	
$P(6{,}09\|8{,}89\|3{,}44)$			

- Die Fußpunkte der senkrechten Säulen sind durch die Koordinaten A, B, C und D gegeben.
- Das Dach des Carports ist in den Punkten E, F, G und H befestigt und wurde ohne Dachüberstand gebaut.
- Die Punkte I, K und L liegen in einer Ebene, welche die angrenzende Hauswand enthält.
- Die Punkte P und S bilden das Ende eines Bleches, welches das Dach an das Haus anschließt.

Alle Zahlenwerte sind in der Einheit Meter angegeben. Auf das Mitführen von Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden. Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden.

5.1	Geben Sie die Ebengleichung E_1 an, in welcher die Dachfläche EFH des Carports liegt. Geben Sie diese in Parameter- und Koordinatenform an. [mögliches Teilergebnis: $E_1\colon -3x_1 + 34x_3 - 98{,}6 = 0$]	5

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe V (Fortsetzung)

		BE
5.2	Um den Abfluss von Regen zu gewährleisten, ist ein Mindestgefälle des Carportdachs von 6 % erforderlich. Berechnen Sie den Neigungswinkel zwischen Carportdach und der Bodenebene (x_1-x_2-Ebene) und beurteilen Sie, ob diese Vorgabe erfüllt ist.	**5**
5.3	Bestimmen Sie die Ebene E_2, in der die Hauswand IKL liegt, in Parameterform. [mögliches Teilergebnis $E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0{,}84 \\ -3{,}91 \\ 0 \end{pmatrix}$]	**2**
5.4.0	An der Berührlinie zwischen Carportdach und Hauswand soll eine Verblechung installiert werden.	
5.4.1	Die vordere Dachkante $\overline{EF}$ schneidet in der Verlängerung die Hauswand im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S. [mögliches Ergebnis: $S(8\|0\|3{,}61)$]	**6**
5.4.2	Bestimmen Sie die Länge der Verblechung $\overline{PS}$.	**3**
5.5	Für eine Feier sollen jeweils die durch die Punkte A, E, H, D und C, D, H, G begrenzte Flächen mit Tüchern verhangen werden. Der Preis pro Quadratmeter beträgt 18 Euro. Berechnen Sie die x_3-Komponente des Punktes G und anschließend die entstehenden Materialkosten.	**4**
		25