Fachabiturprüfung 2022

zum Erwerb der Fachhochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 31. Mai 2022, 09:00 Uhr – 10:00 Uhr

Mathematik

Ausbildungsrichtung Technik

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

4 **1** Gegeben sind die lineare Funktion $g: x \mapsto -\frac{4}{3}x + 8$ und eine quadratische Funktion p mit den Definitionsmengen $D_g = D_p = \mathbb{R}$. Die beiden Schnittpunkte der Geraden G_g mit den Achsen des Koordinatensystems liegen auf der Parabel G_p. Einer dieser Punkte ist zugleich der Scheitelpunkt der Parabel G_p.

Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung der quadratischen Funktion p.

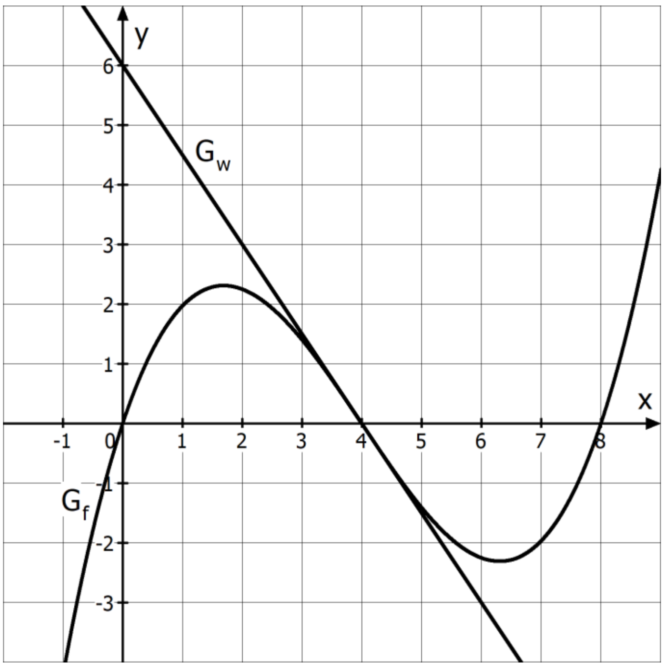
2.0 Die ganzrationale Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ hat den Grad drei.
Nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f von f. Zusätzlich ist die Wendetangente G_w von G_f dargestellt.

Ganzzahlige Koordinaten können der Abbildung entnommen werden.

Es gilt: $\int_0^4 f(x)\,dx = 6$.

Die erste Ableitungsfunktion von f wird mit f' bezeichnet.

F ist eine Stammfunktion von f in der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$.



2 **2.1** Entscheiden Sie jeweils mit kurzer Begründung, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

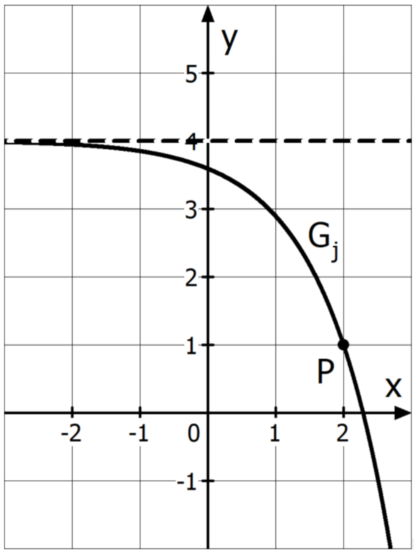
a) f' besitzt die Wertemenge $W_{f'} = [-3; \infty[$.

b) Der Graph von F besitzt genau zwei Wendepunkte.

3 **2.2** Der Graph der Funktion f, die Wendetangente G_w und die y-Achse begrenzen ein endliches Flächenstück. Markieren Sie dieses Flächenstück in der Abbildung aus 2.0 und ermitteln Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

Fortsetzung siehe nächste Seite

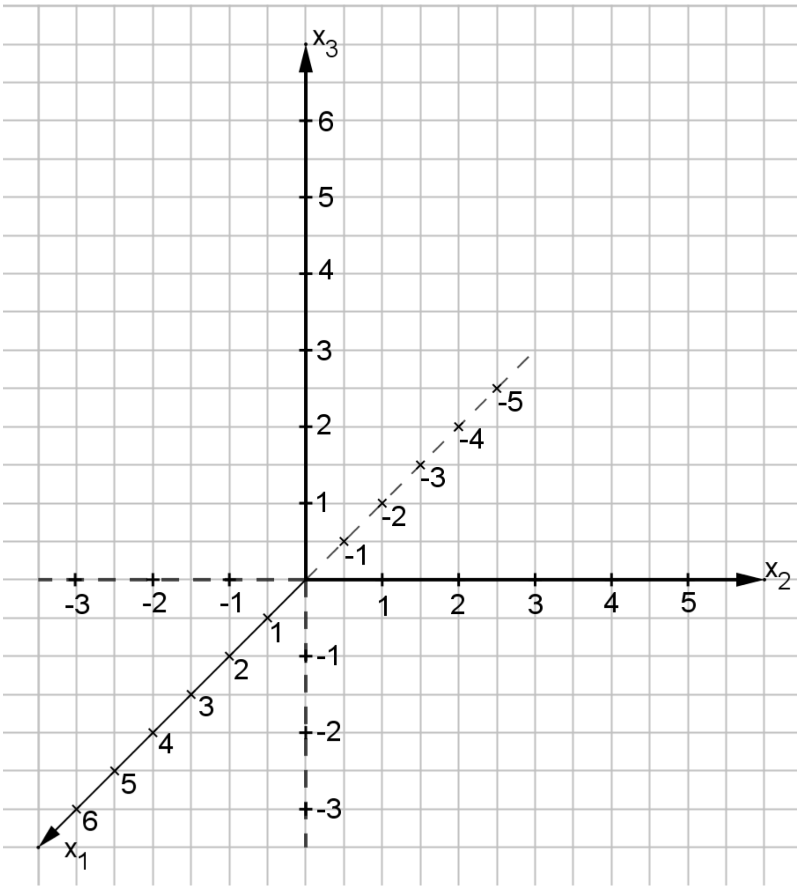
BE		
	3.0	Gegeben ist die Funktion $j: x \mapsto a \cdot e^{x-2} + c$ mit der Definitionsmenge $D_j = \mathbb{R}$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$.
3	**3.1**	Ermitteln Sie die Nullstelle von j in Abhängigkeit von a und c. Geben Sie auch eine Bedingung für a und c an, damit diese Nullstelle existiert.
3	**3.2**	Nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_j der Funktion j, welcher durch den Punkt $P(2\|1)$ verläuft. Zudem ist die Asymptote von G_j gestrichelt dargestellt. Ermitteln Sie die für die nebenstehende Zeichnung verwendeten Werte von a und c.



	4.0	Gegeben ist die reelle Funktion $h_k: x \mapsto (x-2) \cdot (x^2 - k)$ mit der Definitionsmenge $D_{h_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.
2	**4.1**	Geben Sie zwei verschiedene Werte für k an, sodass die Funktion h_k eine mehrfache Nullstelle besitzt.
5	**4.2**	Ermitteln Sie sämtliche Werte für k, für die der Graph von h_k keinen Extrempunkt besitzt.
22		

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebene $E: 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 10$ sowie die Punkte P(6|2|4) und Q(–6|22|12) gegeben.
4	**1.1**	Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g, die die Punkte P und Q enthält, und zeigen Sie, dass die Gerade g die Ebene E senkrecht schneidet.
2	**1.2**	Die Ebene F enthält den Punkt P und liegt parallel zur Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F.
	2.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A(2|2|0), B(2|5|0), C(–3|2|0) und D(1|3|4) Eckpunkte der Pyramide ABCD mit der dreieckigen Grundfläche ABC.
3	**2.1**	Zeichnen Sie die Pyramide ABCD in das unten abgebildete Koordinatensystem ein.



3	**2.2**	Die Geraden ℓ steht senkrecht auf der Grundfläche ABC der Pyramide, verläuft durch den Punkt D und schneidet die Grundfläche ABC im Punkt L. Geben Sie die Gleichung der Geraden ℓ sowie die Koordinaten des Schnittpunktes L an.
12		

Fachabiturprüfung 2022

zum Erwerb der Fachhochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Dienstag, 31. Mai 2022, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

Mathematik

Ausbildungsrichtung Technik – CAS

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Lineare Algebra und analytische Geometrie* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Das Brennen von Keramik erfolgt oft bei Temperaturen über 800 °C. Die Temperatur im Ofen im Laufe des Brennvorgangs wird durch die sogenannte „Brennkurve“ beschrieben. Die folgende Funktionsgleichung beschreibt in guter Näherung eine solche „Brennkurve“ für einen Brennvorgang, der insgesamt 23 Stunden dauert:

$$\vartheta(t) = 0{,}04 \cdot \left(t^4 - 47t^3 + 528t^2 + 576t + 500\right) \quad \text{mit } D_\vartheta = [0;23]$$

Die verstrichene Brenndauer t wird dabei in Stunden ab Beginn des Brennvorgangs zum Zeitpunkt $t = 0$ angegeben, die Temperatur im Ofen $\vartheta(t)$ in Grad Celsius (°C).

Auf das Mitführen von Einheiten während der Berechnungen kann verzichtet werden. Endergebnisse sind samt Einheit zu notieren. Zeitpunkte sind in Stunden auf zwei Nachkommastellen und Temperaturwerte in Grad Celsius ganzzahlig zu runden.

8 **1.1** Bei Temperaturen im Brennofen von 1400 °C und mehr müssen besonders hitzebeständige Tragegestelle für die Keramikteile verwendet werden. Bestimmen Sie den Zeitraum der Aufheizphase, in der die Temperatur im Brennofen ansteigt. Entscheiden Sie mithilfe einer Rechnung, ob ein besonders hitzebeständiges Tragegestell verwendet werden muss.

6 **1.2** Damit das Brenngut keinen Schaden nimmt, darf während der Aufheizphase die momentane Änderungsrate der Temperatur höchstens 115 °C pro Stunde betragen. Untersuchen Sie, ob diese Bedingung erfüllt wird.

4 **1.3** Zeichnen Sie den Graphen von ϑ für $0 \le t \le 23$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: t-Achse: 2 Stunden $\hat{=}$ 1 cm und $\vartheta(t)$-Achse: $100\,°C \hat{=} 1$ cm

3 **1.4** Für besonders gute Brennergebnisse soll ab dem Zeitpunkt $t = 10$ für vier Stunden die durchschnittliche Temperatur im Ofen mindestens 900 °C betragen. Berechnen Sie den tatsächlichen Wert für die betrachtete Brennkurve.

5 **1.5** Für den Brennvorgang einer anderen Keramik wird eine abweichende Brennkurve benötigt. Die Vorgabe für diese Keramik ist, dass der Aufheizvorgang bei einer Ausgangstemperatur von 20 °C beginnt und nach 16 Stunden eine Temperatur von 1400 °C erreicht. Die Brennkurve soll dabei nach 9 Stunden die maximale Änderungsrate von 115 °C pro Stunde aufweisen.
Bestimmen Sie einen Term einer ganzrationalen Funktion vom Grad drei, deren Graph den Aufheizvorgang der neuen Brennkurve annähert.

2.0 Am Graphen G_h der natürlichen Exponentialfunktion $h: x \mapsto e^x$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ werden folgende Veränderungen im kartesischen Koordinatensystem nacheinander durchgeführt:

1. Der Graph von h wird zunächst um eine Längeneinheit entlang der y-Achse nach unten verschoben, …
2. … dann um eine Längeneinheit entlang der x-Achse nach rechts verschoben …
3. … und schließlich an der x-Achse gespiegelt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

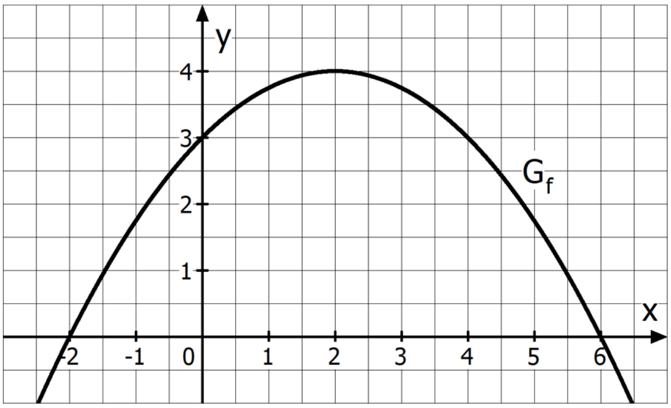
BE

3 **2.1** Der sich nach Schritt 3 ergebende Graph wird mit $G_{\tilde{h}}$ bezeichnet. Die ihm zugrunde liegende Funktion heißt $\tilde{h}$. Notieren Sie eine passende Funktionsgleichung von $\tilde{h}$.

2 **2.2** Nehmen Sie Stellung zum Wahrheitsgehalt folgender Aussage:

„Ein beliebiges Vertauschen der Reihenfolge der Schritte aus 2.0 bewirkt stets einen im Vergleich zu $\tilde{h}$ aus 2.1 veränderten Funktionsterm.“

3.0 Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



Die Gerade mit der Gleichung $x = k$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $0 < k < 3$ schneidet G_f im Punkt P und die x-Achse im Punkt Q. Die Gerade mit der Gleichung $x = 2k$ schneidet G_f im Punkt D und die x-Achse im Punkt C. Dadurch wird ein Viereck PQCD festgelegt. Die Maßzahl des Flächeninhalts des Vierecks PQCD in Abhängigkeit von k wird mit $A(k)$ bezeichnet.

2 **3.1** Im Folgenden stehen drei Ansätze zur Berechnung der Maßzahl des Flächeninhalts des Vierecks PQCD zur Auswahl. Nur ein Ansatz ist richtig.

Ansatz 1	Ansatz 2	Ansatz 3
$A(k) = (2k - k) \cdot f(2k)$	$A(k) = \int_k^{2k} f(x)\,dx$	$A(k) = \frac{f(k) + f(2k)}{2} \cdot k$

Geben Sie den korrekten Ansatz an und erläutern Sie kurz mathematisch, warum Sie sich für diesen Ansatz entschieden haben.

3.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $A(k) = -\frac{5}{8}k^3 + \frac{3}{2}k^2 + 3k$

7 **3.2.1** Bestimmen Sie den Wert für k so, dass der Flächeninhalt des Vierecks PQCD maximal wird. Berechnen Sie zudem die Maßzahl des maximalen Flächeninhalts. Ergebnisse sind auf eine Nachkommastelle zu runden.

3 **3.2.2** Berechnen Sie denjenigen Wert für $k \in]0;3[$, für den gilt: $\int_k^{2k} f(x)\,dx - A(k) = \frac{1}{3}$.

43

BE

1.0 Gegeben ist die quadratische Funktion $f_a : x \mapsto -\frac{1}{a} \cdot x^2 + x + 3$ mit ihrer Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Graph wird mit G_{f_a} bezeichnet.

4 **1.1** Untersuchen Sie rechnerisch, ob es einen Wert für a gibt, sodass die Parabel G_{f_a} den Scheitelpunkt $E(3|\,4{,}5)$ hat.

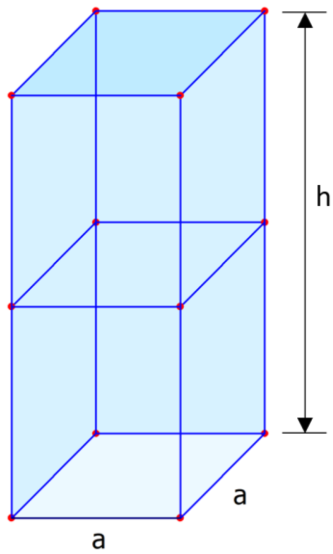
5 **1.2** Bestimmen Sie sämtliche Werte für a, für welche die Funktion f_a keine Nullstelle besitzt.

4 **1.3** Im Folgenden sei $a = 4$ und damit gilt: $f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$.
Bestimmen Sie einen Term der Stammfunktion F_4 von f_4, sodass der Graph von F_4 durch den Punkt $E(3|\,4{,}5)$ verläuft.

2.0 Lydia möchte ein quaderförmiges Gewächshaus für Tomaten mit quadratischer Grundfläche bauen. Sie verwendet für den Rahmen Holzlatten, die 1,20 Euro pro Meter kosten. Ein grober Bauplan ist in der nebenstehenden, nicht maßstabsgetreuen Skizze gezeigt.

Lydia will für den Rahmen Holzlatten kaufen und dafür genau 30 Euro ausgeben.

Die Breite der Latten wird bei den Berechnungen vernachlässigt. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse gegebenenfalls sinnvoll.



4 **3.1** Lydia möchte wissen, wie das Volumen des Gewächshauses von der Seitenlänge a abhängt. Stellen Sie eine Funktionsgleichung für das Volumen V des Gewächshauses in Abhängigkeit von der Seitenlänge a auf und geben Sie eine im Sachzusammenhang theoretisch möglichst große Definitionsmenge an.

[mögliches Teilergebnis: $V(a) = \frac{25}{4}a^2 - 3a^3$]

7 **3.2** Ermitteln Sie die Seitenlänge a der Grundfläche so, dass sich ein möglichst großes Volumen des Gewächshauses ergibt, und berechnen Sie das maximale Volumen.

3 **3.3** Lydia entscheidet sich für eine Seitenlänge von $a = 1{,}4$ Meter und kauft für 30 Euro Holzlatten in der passenden Länge. Nach dem Bau des Gewächshauses möchte Lydia die Deckfläche und die Seitenflächen mit Folie bespannen und kauft deswegen eine Folie mit der Breite 1,4 Meter. Bestimmen Sie die Mindestlänge der Folie, die zur Verhüllung des Gewächshauses gekauft werden muss, wenn die Folie nur in ganzen Metern erhältlich ist.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
	3.0	Bianca pflanzt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ eine Kletterrose in einen großen Pflanzkübel, der auf ihrer Terrasse steht. Die Rankhöhe h (in Meter) der Kletterrose gegenüber dem Terrassenboden zum Zeitpunkt t in Jahren seit dem Einpflanzen wird näherungsweise durch die Funktion $h: t \mapsto 0{,}4 + 0{,}071 \cdot e^{c \cdot t}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.
4	**3.1**	Berechnen Sie den Wert für c, wenn die Kletterrose 20 Monate nach dem Einpflanzen ihre anfängliche Rankhöhe verdoppelt hat.
3	**3.2**	Nun gilt: $c = 1{,}2$. Berechnen Sie den Höhenzuwachs der Kletterrose innerhalb der ersten zwei Jahre.
	4.0	Laut Prognosen der Vereinten Nationen kann mit konventionellen Lebensmitteln aus Fleisch auf Dauer die Weltbevölkerung nicht ernährt werden. Zudem ist die Fleischproduktion speziell mit Rindern ein Treiber klimaschädlicher Gase. Das Unternehmen SafeTheWorld hat sich daher entschlossen, Fleischersatzprodukte wie Insektenburger auf der Basis von Buffalowürmern zu produzieren. Insekten benötigen wenig Platz, vermehren sich sehr schnell und enthalten hochwertige Proteine. Rinder brauchen im Vergleich zu Buffalowürmern für dieselbe Zunahme an Protein ein Vielfaches mehr an Futter und Wasser. Nach Optimierung der Zuchtbedingungen geht das Unternehmen konkret davon aus, dass die Gesamtmasse ihrer Buffalowürmer alle vier Wochen auf das 500-fache anwächst. Die durchschnittliche Masse eines Buffalowurms beträgt 0,5 Gramm. Die Zucht soll mit 20000 Buffalowürmern beginnen. Auf das Mitführen von Einheiten kann während der Berechnungen verzichtet werden.
3	**4.1**	Die Funktion m beschreibt die Gesamtmasse der Buffalowürmer in Kilogramm in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t in Wochen nach Zuchtbeginn $(t = 0)$. Ermitteln Sie nachvollziehbar eine Gleichung der Funktion m. [Zwischenergebnis: $m(t) = 10 \cdot 500^{0{,}25t}$]
	4.2.0	SafeTheWorld startet mit der Produktion seiner Insektenburger, sobald aus der Zucht der Buffalowürmer dauerhaft einmal pro Woche mindestens 1000 kg Buffalowürmer zur Weiterverarbeitung entnommen werden können.
4	**4.2.1**	Es wird nun ein beliebiger Zeitpunkt t betrachtet. Während der unmittelbar zu diesem Zeitpunkt zurückliegenden Woche hat die Gesamtmasse der Buffalowürmer um $\Delta m(t)$ zugenommen. Zeigen Sie, dass gilt: $\Delta m(t) = 10 \cdot 500^{0{,}25t} \cdot \left(1 - 500^{-0{,}25}\right)$
2	**4.2.2**	Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt t_s, zu dem SafeTheWorld erstmals 1000 kg Buffalowürmer entnehmen und somit die Produktion starten kann. Runden Sie Ihr Ergebnis auf 3 Nachkommastellen.
43		

BE

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind der Punkt $A(2|-1|-4)$ sowie die Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ und $h_k:\vec{x}=\begin{pmatrix}4{,}5\\4\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}k\\-2\\2\end{pmatrix}$ mit $\lambda,\mu,k\in\mathbb{R}$ gegeben.

Es gilt $A\notin g$. Somit legen der Punkt A und die Gerade g eine Ebene E fest.

5 **1.1** Ermitteln Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Koordinatenform.
[Mögliches Teilergebnis: $E: x_1-2x_2-4=0$]

4 **1.2** Bestimmen Sie den Wert von k so, dass sich die Geraden g und h_k in einem Punkt S schneiden und berechnen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes S.

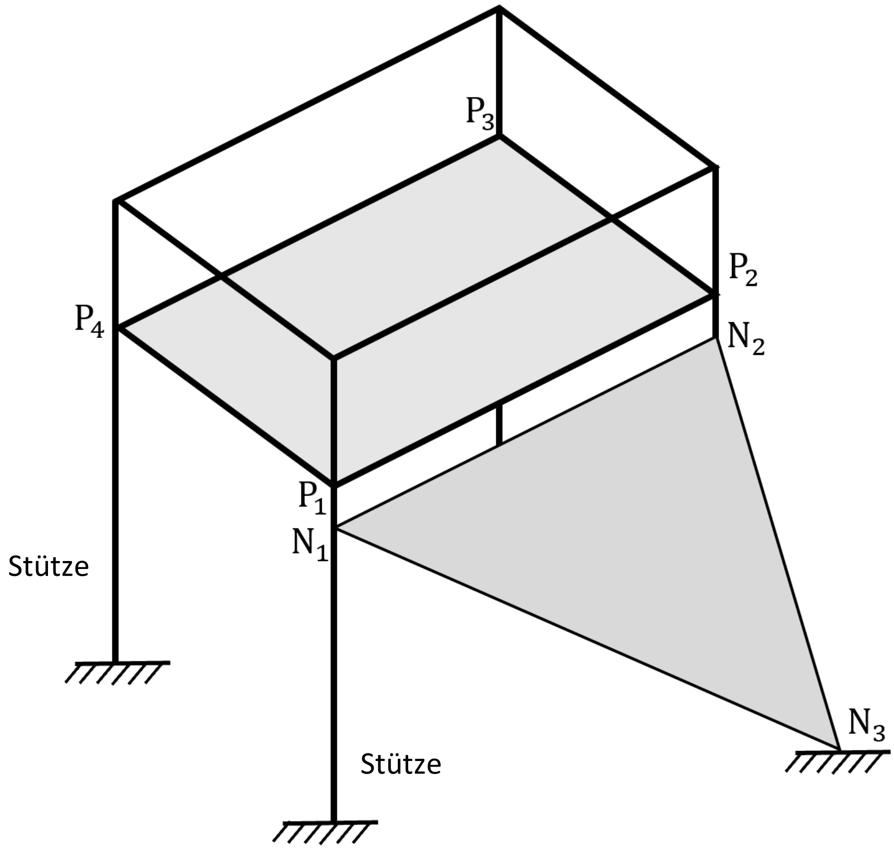
5 **1.3** Für $k=-4$ ergibt sich die Gerade $h_{-4}:\vec{x}=\begin{pmatrix}4{,}5\\4\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-4\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die Gerade h_{-4} echt parallel zur Ebene E verläuft.
Fertigen Sie ohne Verwendung eines Koordinatensystems eine aussagekräftige Skizze an, aus der die gegenseitige Lage von E sowie der beiden Geraden h_{-4} und g klar hervorgeht.
Formulieren Sie die Lagebeziehung zwischen h_{-4} und g zusätzlich in Worten.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.0 Die Abbildung zeigt modellhaft einen Teil eines Klettergerüsts auf einem Spielplatz, das in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ beschrieben wird. Die Fußpunkte der Stützen des Klettergerüsts liegen in der x_1x_2-Ebene und dazu parallel die rechteckige Plattform $P_1P_2P_3P_4$. Über ein dreieckiges Netz, das an den Punkten N_1, N_2 und N_3 fixiert ist, können die Kinder auf die Plattform $P_1P_2P_3P_4$ klettern. Folgende Punkte sind gegeben: $P_1(1{,}8|1{,}2|1{,}5)$, $P_2(0|1{,}2|1{,}5)$, $P_3(0|0|1{,}5)$ und $N_3(0{,}9|3{,}6|0)$. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung der Einheiten kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.



2 **2.1** Geben Sie die Koordinaten des Punktes P_4 an.

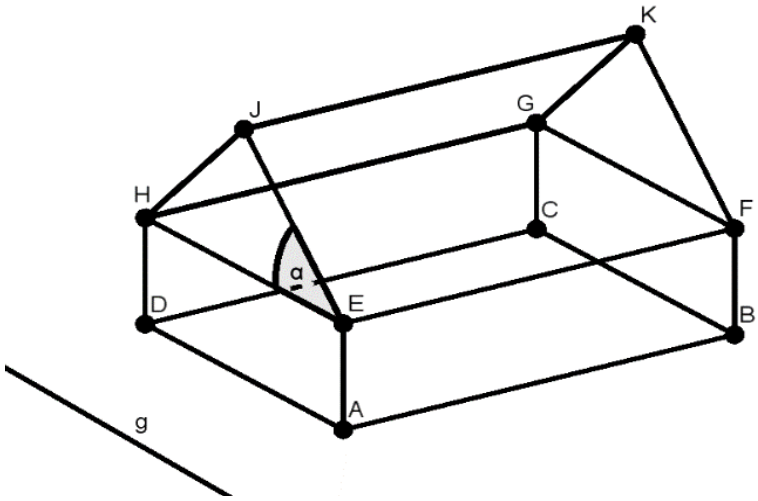
4 **2.2** Das Netz ist in den Punkten N_1 und N_2 befestigt, die jeweils 10 cm senkrecht unter den Punkten P_1 und P_2 liegen. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Netzes.

3 **2.3** Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Netz und der x_1x_2-Ebene.

23

BE

1.0 Eine Architektin plant den Bau eines einstöckigen Hauses. Dazu stellt sie das Haus modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ dar. Im Modell wird das Haus aus einem Quader und einem dreiseitigen, geraden Prisma zusammengesetzt. Gegeben sind die Punkte $A(2|2|0)$, $B(10|10|0)$, $C(4|16|0)$ und $J(-1|5|7)$. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Die Deckenhöhe im Erdgeschoss beträgt 3 m. Bei den Rechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.



4 **1.1** Zeigen Sie, dass der Punkt D die Koordinaten $(-4|8|0)$ besitzt. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Grundfläche ABCD des geplanten Hauses im Punkt B rechtwinklig ist.

3 **1.2** Eine Grundstücksgrenze des Baugrundstückes verläuft entlang der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$. Die Punkte A und D liegen auf der Geraden h. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

4 **1.3** Ermitteln Sie die Maßzahl des Gesamtvolumens des Hauses.

3 **1.4** Für den Dachneigungswinkel α (siehe 1.0) gilt gemäß der örtlichen Bauvorschrift $30° \le \alpha \le 45°$. Zeigen Sie, dass der Dachneigungswinkel die Bauvorschrift erfüllt.

5 **1.5** Im Dachgeschoss soll eine Zwischendecke eingezogen werden, die parallel zur Grundfläche und einen Meter tiefer als der First $\overline{JK}$ ist. Diese Zwischendecke liegt in der Ebene Z. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene Z mit der durch EFKJ gegebenen Ebene.

4 **1.6** Zur Bewässerung des Gartens soll Regenwasser, das auf das Hausdach trifft, in einer Zisterne gesammelt werden. Gemäß statistischer Daten der letzten Jahrzehnte ist die durchschnittliche gesamte Niederschlagsmenge im sonnenreichen Juli $101\frac{\ell}{m^2}$. Zur Bewässerung des $113\ m^2$ großen Gartens sind zusätzlich täglich $2{,}5\frac{\ell}{m^2}$ notwendig. Entscheiden Sie mithilfe einer Rechnung, ob die Bewässerung im Monat Juli gemäß der statistischen Daten durchgeführt werden kann. Vereinfachend wird von störenden Einflüssen wie etwa Wind abgesehen und angenommen, dass der Regen parallel zur x_3-Achse fällt.

23