MITTLERER SCHULABSCHLUSS
AN DER MITTELSCHULE 2022

MATHEMATIK

23. Juni 2022

8:30 Uhr – 11:25 Uhr

Die coronabedingte Anpassung der Prüfungsdauer ist bereits abgebildet (vgl. KMS mit Nr. III.2-BS7501.2022/24/1 vom 24.02.2022).

Platzziffer (ggf. Name/Klasse): ____

Die Benutzung von für den Gebrauch an der Mittelschule zugelassenen **Formelsammlungen** bzw. **Taschenrechnern** ist während der gesamten Prüfung **erlaubt** (vgl. KMS vom 06.11.2019 Nr. III.2 – BS7200.0/41/1).

Ergebnisse können nur dann bewertet werden, wenn sowohl der **Lösungsweg** als auch die **Teilergebnisse** aus dem Lösungsblatt ersichtlich sind und sich die Gesamtergebnisse daraus ableiten lassen. Auf mathematische Genauigkeit und korrekte Schreibweisen ist zu achten.

Die Prüflinge müssen jeweils **eine** vom Prüfungsausschuss ausgewählte **Aufgabengruppe** bearbeiten.

Gesamtbewertung		Erst-korrektur	Zweit-korrektur
Aufgabengruppe I oder II	45 Punkte		

Note ☐

Notenstufen	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Punkte	45,0 – 38,0	37,5 – 31,0	30,5 – 23,0	22,5 – 15,0	14,5 – 7,0	6,5 – 0

Erstkorrektur: ____
(Datum, Unterschrift)

Zweitkorrektur: ____
(Datum, Unterschrift)

Bemerkung: ____

Aufgabengruppe I

Punkte

1. a) Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der nach oben geöffneten Normalparabel p_1 mit dem Scheitelpunkt S_1 (–4 | 1) in der Normalform.

   b) Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 geht durch die Punkte A (–4 | 1) und B (0 | 1).
   Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_2 in der Scheitelpunktform und geben Sie den Scheitelpunkt S_2 an.

   c) Bestimmen Sie zeichnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte Q und R der beiden Normalparabeln p_1 und p_2 in einem Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm. Geben Sie Q und R an.

   d) Die Normalparabeln p_3: $y = x^2 + 2x - 2$ sowie p_4: $y = -x^2 - 2x + 4$ schneiden sich in den Punkten M und N.
   Berechnen Sie die Koordinaten von M und N und geben Sie beide Punkte an. 8

2. Der Neupreis eines Autos beträgt 37 450 €.

   a) Berechnen Sie, in wie vielen Jahren sich der Wert dieses Autos auf 25 000 € verringert, wenn man von einem jährlich gleichbleibenden prozentualen Wertverlust von 12,7 % ausgeht.

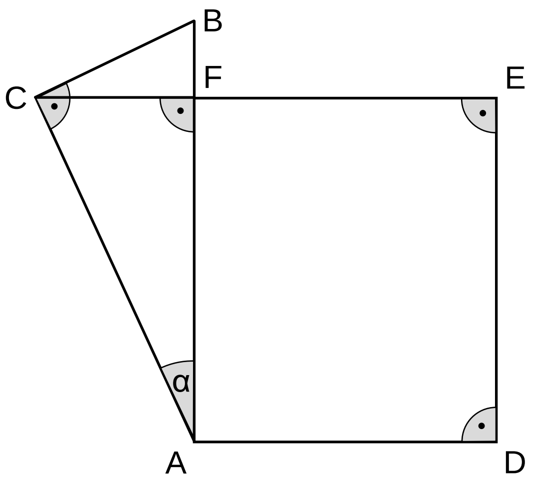
   b) Der Neuwagen soll nach acht Jahren als Gebrauchtwagen für 9 000 € verkauft werden.
   Bestimmen Sie für diesen Fall den Wertverlust pro Jahr in Prozent, unter der Annahme, dass dieser über die Jahre hinweg gleich bleibt.

   c) Tatsächlich ist der Wertverlust aber nicht gleichbleibend.
   Im ersten Jahr beträgt er 25 %, im zweiten Jahr 18 % und in den darauffolgenden vier Jahren jeweils 9 %.
   Ermitteln Sie den Wert des Autos nach diesen 6 Jahren. 4

3. Die folgende Abbildung zeigt eine Figur, bei der gilt:

   $\overline{AD} = 8$ cm;
   $\alpha = 25°$;
   $A_{ADEF} = 72\ cm^2$

   Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.



Hinweis:
Skizze nicht maßstabsgetreu

Quelle: StMUK

3

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

4. Vereinfachen Sie den unten stehenden Term so weit wie möglich.
   Es gilt: x; y; z ≠ 0

$$\frac{21x^{-4} \cdot 9y^{3} \cdot 6z^{5} \cdot x^{3} \cdot 8z^{-8}}{4y^{2} \cdot 7x^{-6} \cdot 3y \cdot 18z^{-4}}$$

2

5. a) Die Gerade g_1 verläuft durch den Punkt A (4 | 4,5) und hat die Steigung $m_1 = \frac{3}{4}$.
   Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von g_1.
   b) Berechnen Sie die x-Koordinate der Nullstelle N der Gerade g_2: y = –2,5x – 7,5.
   c) Der Punkt P (–4 | y) liegt auf g_2.
   Berechnen Sie die fehlende y-Koordinate.
   d) Die Gerade g_4 durch den Punkt C (4,5 | –2) steht senkrecht auf der Geraden g_3: y = 0,25x + 4.
   Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von g_4.
   e) Die Gerade g_5 mit der Funktionsgleichung 14 – 3y = 3,75x – 7 schneidet die Gerade g_3 im Punkt D.
   Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunkts D.
   f) Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Geraden g_6, auf der die Punkte E (4,5 | –2) und F (–1,5 | 6) liegen.
   g) Zeichnen Sie die Geraden g_2, g_3 und g_6 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm. 8

6. Gegeben ist folgende Gleichung:

$$\frac{1{,}5x + 6}{x + 6{,}5} = \frac{x - 3}{2x - 3}$$

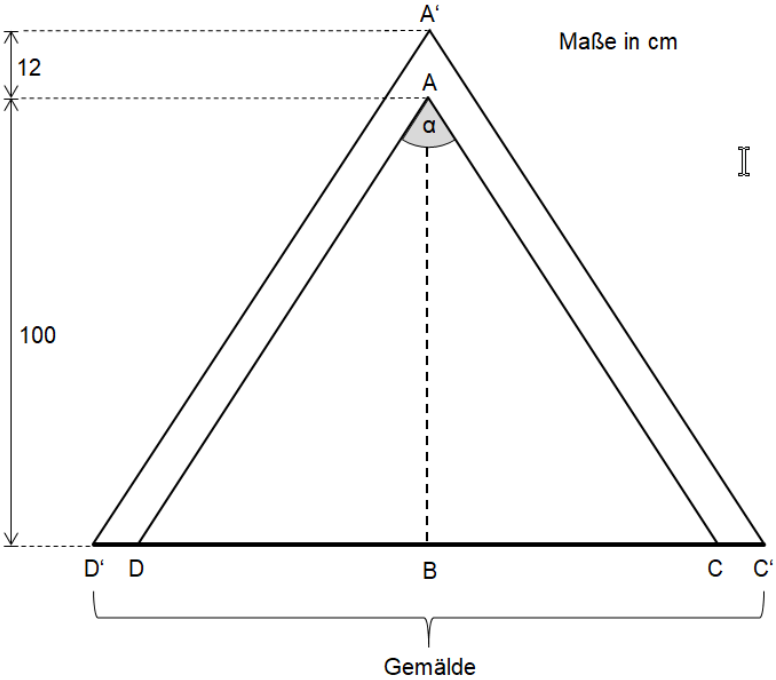
   Geben Sie die Definitionsmenge an, lösen Sie die Gleichung nach x auf und bestimmen Sie die Lösungsmenge. 4

7. In einer Firma werden vier gleich große Pralinenkugeln, die vollständig mit Marzipan gefüllt sind, mit einem Durchmesser von jeweils 3 cm übereinander in eine Schachtel verpackt.
   a) Die zylinderförmige Verpackung hat eine Höhe von 12,2 cm und einen Innendurchmesser von 3,2 cm.
   Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Luft in der Schachtel am Innenvolumen der Schachtel nach dem Verpacken der vier Pralinen.
   b) Jede Pralinenkugel soll mit einer dünnen Blattgoldschicht überzogen werden. Berechnen Sie, wie viele cm^2 Blattgold für eine Pralinenkugel mindestens benötigt werden.
   c) Bestimmen Sie die Masse einer massiven Kugel aus Gold mit einem Volumen von 753 mm^3. Dabei wiegt ein 1 cm^3 Gold 19,3 g. 5

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

8. Ein Gemälde mit der Breite $\overline{D'C'}$ soll vollständig ausgeleuchtet werden (siehe Skizze, die eine Ansicht von oben darstellt). Wenn sich der Scheinwerfer 1 m entfernt befindet (A), bleiben insgesamt 15 cm der Bildbreite schlecht beleuchtet. Um die ganze Breite gut auszuleuchten, wird die Lichtquelle um 12 cm verschoben (A‘).
Ermitteln Sie rechnerisch die Breite $\overline{D'C'}$ und die Größe des Winkels α.



Quelle: StMUK

Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu 4

9. Bei den folgenden Umformungen werden die binomischen Formeln angewendet.

Ersetzen Sie die Platzhalter □ jeweils durch den entsprechenden Term und schreiben Sie die mathematisch richtige Gleichung auf Ihr Lösungsblatt.

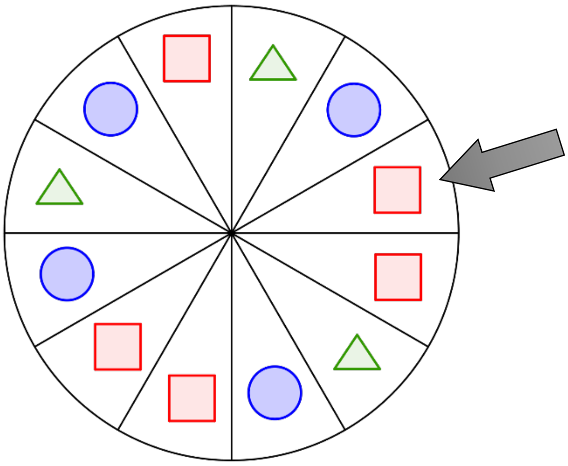
I. $49a^6 + \square + 100c^2 = (\square + \square)^2$

II. $(18ac + \square) \cdot (18ac - \square) = \square - \frac{1}{25}b^2$ 3

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

10. Ein Glücksrad ist in gleich große Sektoren unterteilt.
Auf jedem Feld befindet sich eines von drei Symbolen (siehe Skizze).



a) Das Glücksrad wird zweimal nacheinander gedreht.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den möglichen Ergebnissen und beschriften Sie die Äste mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

b) Das Glücksrad wird dreimal nacheinander gedreht.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Pfeil zuerst auf ein Dreieck, dann auf ein Viereck und danach auf einen Kreis zeigt, und geben Sie diese in Prozent an.

c) Das Glücksrad wird viermal nacheinander gedreht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass nicht viermal hintereinander ein Kreis angezeigt wird. 4

Summe: 45

Aufgabengruppe II

Punkte

1. a) Die Gerade g_1 ist durch die Funktionsgleichung $y = -x + 3{,}5$ bestimmt. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts N der Geraden g_1 mit der x-Achse und geben Sie N an.

   b) Die folgenden Wertepaare sind Punkte der Geraden g_2:

x	−3	2	4
y	−4	3,5	6,5

   Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von g_2.

   c) Die Gerade g_3: $y = -0{,}2x - 1{,}5$ schneidet die Gerade g_1 im Punkt T. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts T und geben Sie diesen an.

   d) Die Gerade g_1 wird zuerst an der x-Achse und dann an der y-Achse gespiegelt. Dadurch entsteht die Gerade g_4. Geben Sie die Funktionsgleichung von g_4 an.

   e) Die Gerade g_5 hat die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{3}x + 4$. Die Gerade g_6 steht senkrecht auf g_5 und verläuft durch den Punkt P (−1 | 5). Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von g_6.

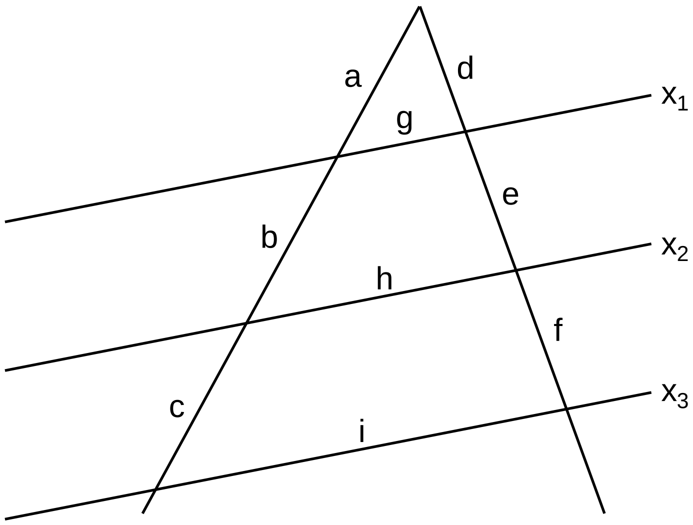
   f) Zeichnen Sie die Geraden g_1, g_5 und g_6 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm. 8

2. Martina stellt Vogelfutter her. Für die Herstellung des Teigs verwendet sie einen Topf in Form eines Zylinders. Dieser hat im Inneren einen Durchmesser von 26 cm und eine Höhe von 28 cm. Die Teigmasse füllt den Topf bis 8 cm unter den Rand. Martina formt damit Kugeln mit einem Durchmesser von 5 cm, solange dies möglich ist. Aus der übrigen Teigmasse fertigt sie eine letzte, kleinere Kugel. Berechnen Sie den Durchmesser dieser kleineren Kugel. 4

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

3. In der folgenden Skizze gilt: $x_1 \parallel x_2 \parallel x_3$



Quelle: StMUK

Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

a) Schreiben Sie die folgenden Aussagen auf Ihr Lösungsblatt und ersetzen Sie jeweils den Platzhalter □ so, dass die Beziehungen richtig wiedergegeben werden.

I. $\frac{a + b + c}{\square} = \frac{a}{g}$ II. $\frac{c}{f} = \frac{\square}{e}$ III. $\frac{\square}{h} = \frac{d}{g}$

b) Folgende Streckenlängen sind gegeben:
$a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $g = 2$ cm
Berechnen Sie die Länge der Strecke h. 4

4. In einem Behälter befinden sich acht gelbe und drei weiße Spielbälle für ein Kickerturnier.
Serkan nimmt nacheinander drei Spielbälle ohne Zurücklegen aus dem Behälter. Dies geschieht nach dem Zufallsprinzip.

a) Stellen Sie diesen Ablauf in einem Baumdiagramm dar und beschriften Sie die Äste mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei dreimaligem Ziehen mindestens zwei gelbe Spielbälle gezogen werden.

c) Die Bälle sind mit den Zahlen eins bis elf durchnummeriert.
Serkan nimmt die restlichen Bälle aus dem Behälter und legt alle 11 Bälle vor sich in einer Reihe hin.
Berechnen Sie die Anzahl aller möglichen verschiedenen Reihenfolgen, in der die Bälle gelegt werden könnten. 4

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

5. a) Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 verläuft durch die Punkte A $(-3 \mid 1)$ und B $(2 \mid 6)$.
Geben Sie die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform an.

b) Die Normalparabel p_2 ist nach unten geöffnet und hat den Scheitelpunkt S_2 $(3 \mid 4)$.
Geben Sie die Funktionsgleichung von p_2 in der Normalform an.

c) Zeichnen Sie die Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.

d) Der Punkt C $(7 \mid y)$ liegt auf der Normalparabel p_3: $y = -x^2 + 7x + 14$.
Berechnen Sie die fehlende y-Koordinate.

e) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt D $(-3 \mid 16)$ auf der Parabel p_3 liegt.

f) Bestimmen Sie durch Rechnung den Scheitelpunkt S_3 der Parabel p_3.

g) Die Parabel p_4: $y = x^2 - 20x + 96$ schneidet die x-Achse in den Punkten N_1 und N_2.
Ermitteln Sie die x-Koordinaten von N_1 und N_2 rechnerisch.

h) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade g: $2y + 6x = 38$ keinen gemeinsamen Punkt mit der Parabel p_4 hat. 8

6. a) Ersetzen Sie den Platzhalter □ durch einen Term so, dass eine wahre Aussage entsteht.
Dabei sind m und b beliebige, positive, reele Zahlen.
Schreiben Sie die korrekte Gleichung auf Ihr Lösungsblatt.

$$\sqrt{\square} = m^4 b$$

b) Ersetzen Sie die Platzhalter ♦ (Rechenzeichen) und □ (Terme) in der folgenden Gleichung so, dass eine korrekte Anwendung einer binomischen Formel entsteht.

Schreiben Sie diese Gleichung vollständig auf Ihr Lösungsblatt.

$$(\square - \square)^2 = 0{,}64a^4 \ \blacklozenge\ 4a^2b^9 + \square$$ 3

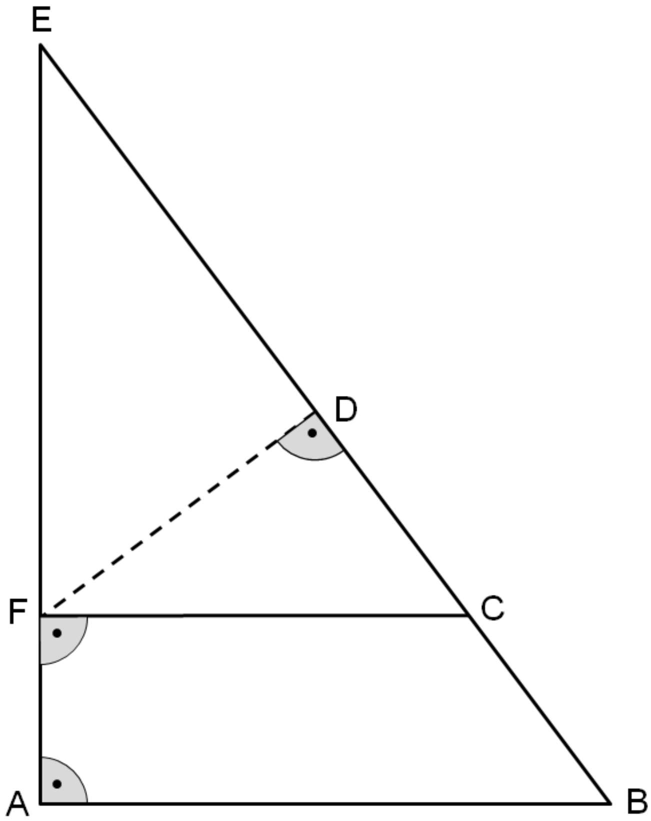
Fortsetzung nächste Seite

Punkte

7. Die folgende Skizze zeigt die Fläche einer Werbetafel für eine Surfschule.

   Es gilt:

   $\overline{CD} = 2{,}25$ m; $\overline{CE} = 6{,}25$ m; $\overline{BE} = 1{,}5 \cdot \overline{CE}$



Quelle: StMUK

Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

   a) Das Trapez ABCF der Werbetafel soll rot lackiert werden.
      Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.

   b) Der Umfang der Tafel soll entlang des Dreiecks ABE mit einem speziellen LED–Lichtschlauch beleuchtet werden. Diesen kann man nur bis zu einem Winkel von 25° biegen, damit er nicht bricht.
      Überprüfen Sie, ob der Lichtschlauch für dieses Dreieck geeignet ist. 5

8. Gegeben ist folgende Gleichung:

$$\frac{-32}{(-2x-8)} = 4 + \frac{5x}{(8+2x)}$$

   Geben Sie die Definitionsmenge an, lösen Sie die Gleichung nach x auf und bestimmen Sie die Lösungsmenge. 4

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

9. Die Bevölkerungszahl in deutschen Städten hat sich in den letzten Jahren verändert.

   a) Am 1. Januar 2010 wohnten in einer Stadt 460 725 Einwohner.
   Diese Einwohnerzahl stieg in neun Jahren um insgesamt 30 800.
   Berechnen Sie das durchschnittliche jährliche Bevölkerungswachstum dieser Stadt in Prozent.

   b) In einer Großstadt betrug am 1. Januar 2019 die Einwohnerzahl 1 847 253.
   Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitraum in Jahren, in dem diese Großstadt bei einem durchschnittlichen jährlichen Wachstum von 0,38 % die Grenze von zwei Millionen Einwohnern überschreiten würde.

   c) In anderen Städten sinken die Einwohnerzahlen.
   Berechnen Sie die Anzahl der Einwohner einer Stadt nach zehn Jahren, wenn diese momentan 246 334 Einwohner zählt und man von einem jährlichen durchschnittlichen Rückgang von 1,01 % ausgeht.

   d) In vielen ländlichen Gebieten sinken die Einwohnerzahlen noch stärker.
   Am 1. Januar 2021 hatte eine kleine Gemeinde 2510 Einwohner.
   Seit dem 1. Januar 2000 nahm die Einwohnerzahl durchschnittlich um jährlich 2,8 % ab.
   Berechnen Sie die Anzahl der Einwohner am 1. Januar 2000. 5

Summe: 45