

Mathematik

Abiturprüfung 2023

Prüfungsteil A

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

<hr/>
Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(x-3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Ableitungsfunktion f' .

2 a) Geben Sie D sowie die Nullstelle von f an.

3 b) Ermitteln Sie diejenige Stelle $x \in D$, für die $f'(x) = 2$ gilt.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$.

2 a) Geben Sie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g sowie die Wertemenge von g an.

3 b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\frac{1}{2}}^2 g(x) dx$.

3 Eine in \mathbb{R} definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein lokales Minimum an der Stelle x_3 .

Abbildung 1 zeigt die Positionen von x_1 , x_2 und x_3 .

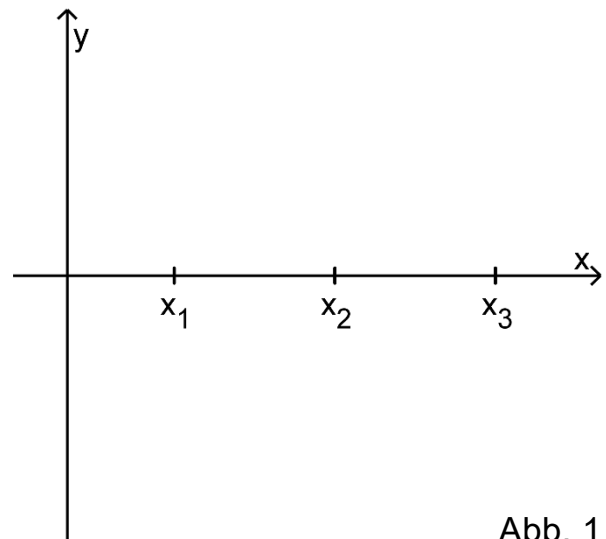


Abb. 1

2 a) Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.

3 b) Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Graphen von f .

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 Abbildung 2 zeigt den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion g , dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P .

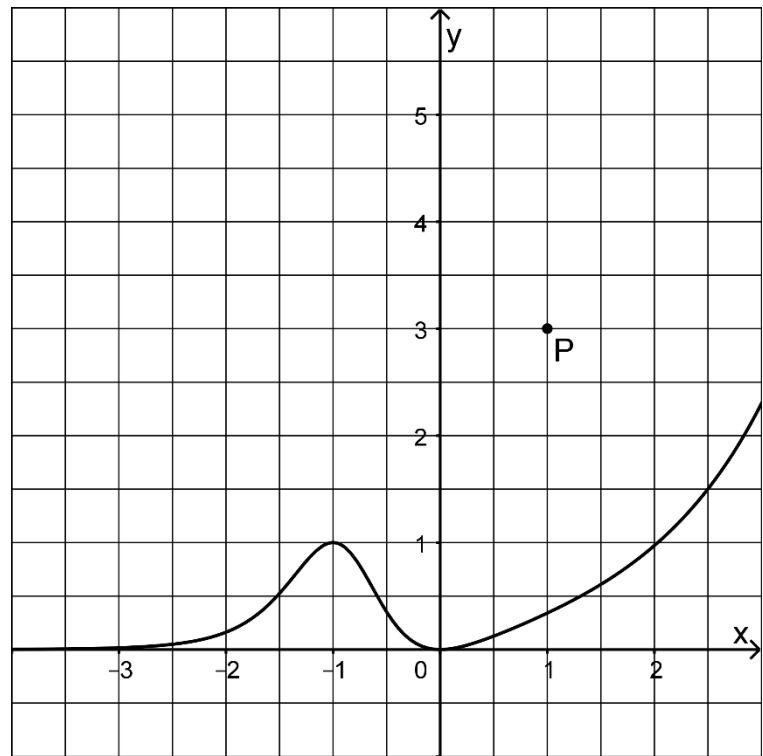


Abb. 2

- a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x - 3)$ an.
- b) Der Graph einer Stammfunktion von g verläuft durch P . Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 2}$ mit maximalem Definitionsbereich D.

3 a) Bestimmen Sie D und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an.

2 b) Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von f an.

2 Gegeben ist die in \mathbb{R}_0^+ definierte Funktion $g: x \mapsto \sqrt{x} + 1$.

3 a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(1|g(1))$.

2 b) Die Funktion g ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion g^{-1} von g ist in $[1; +\infty[$ definiert. Bestimmen Sie einen Term von g^{-1} .

3 Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f: x \mapsto -x^2 + 2ax$ mit $a \in]1; +\infty[$. Die Nullstellen von f sind 0 und 2a.

2 a) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

3 b) Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung 1). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a.

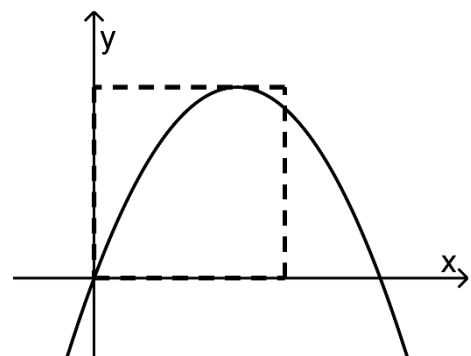


Abb. 1

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 Abbildung 2 zeigt den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion g , dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P .

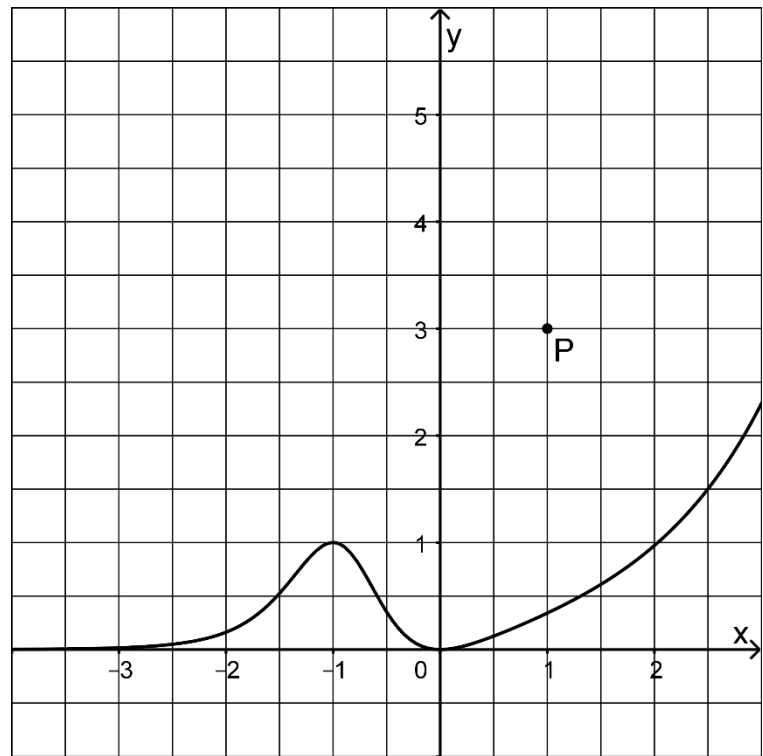


Abb. 2

- a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x - 3)$ an.
- b) Der Graph einer Stammfunktion von g verläuft durch P . Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

Stochastik
Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

- | | |
|-----------|--|
| <i>BE</i> | Die vier Seiten eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert. Das Tetraeder wird fünfmal geworfen. |
| 2 | a) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ berechnet werden kann, und begründen Sie Ihre Angabe. |
| 3 | b) Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass jede Zahl mindestens einmal erzielt wird. |

5

Stochastik
Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

- BE**
- In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.
- 2** **a)** Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.
- 3** **b)** Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind.

Geometrie
Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 **a)** Zeigen Sie, dass g in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ liegt.

3 **b)** Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben sind die Punkte $A(3|5|5)$ und $B(1|1|1)$ sowie die Geraden g und h , die sich in B schneiden. Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, die

Gerade h den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- 1 **a)** Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.
- 4 **b)** Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

5