

Mathematik

# Abiturprüfung 2023

## Prüfungsteil A (CAS)

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

<hr/>
Name des Prüflings

**Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.**

# Analysis

## Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

**1** Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto \ln(x-3)$  mit maximaler Definitionsmenge  $D$  und Ableitungsfunktion  $f'$ .

**2**     **a)** Geben Sie  $D$  sowie die Nullstelle von  $f$  an.

**3**     **b)** Ermitteln Sie diejenige Stelle  $x \in D$ , für die  $f'(x) = 2$  gilt.

**2** Gegeben ist die in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  definierte Funktion  $g: x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$ .

**2**     **a)** Geben Sie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von  $g$  sowie die Wertemenge von  $g$  an.

**3**     **b)** Berechnen Sie den Wert des Integrals  $\int_{\frac{1}{2}}^2 g(x) dx$ .

**3** Eine in  $\mathbb{R}$  definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion  $f$  mit erster Ableitungsfunktion  $f'$  und zweiter Ableitungsfunktion  $f''$  hat folgende Eigenschaften:

- $f$  hat bei  $x_1$  eine Nullstelle.
- Es gilt  $f'(x_2) = 0$  und  $f''(x_2) \neq 0$ .
- $f'$  hat ein lokales Minimum an der Stelle  $x_3$ .

Abbildung 1 zeigt die Positionen von  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ .

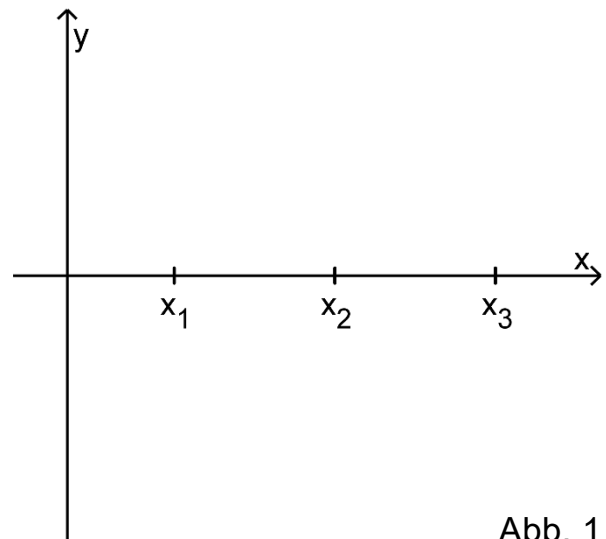


Abb. 1

**2**     **a)** Begründen Sie, dass der Grad von  $f$  mindestens 3 ist.

**3**     **b)** Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Graphen von  $f$ .

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 Abbildung 2 zeigt den Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $g$ , dessen einzige Extrempunkte  $(-1|1)$  und  $(0|0)$  sind, sowie den Punkt  $P$ .

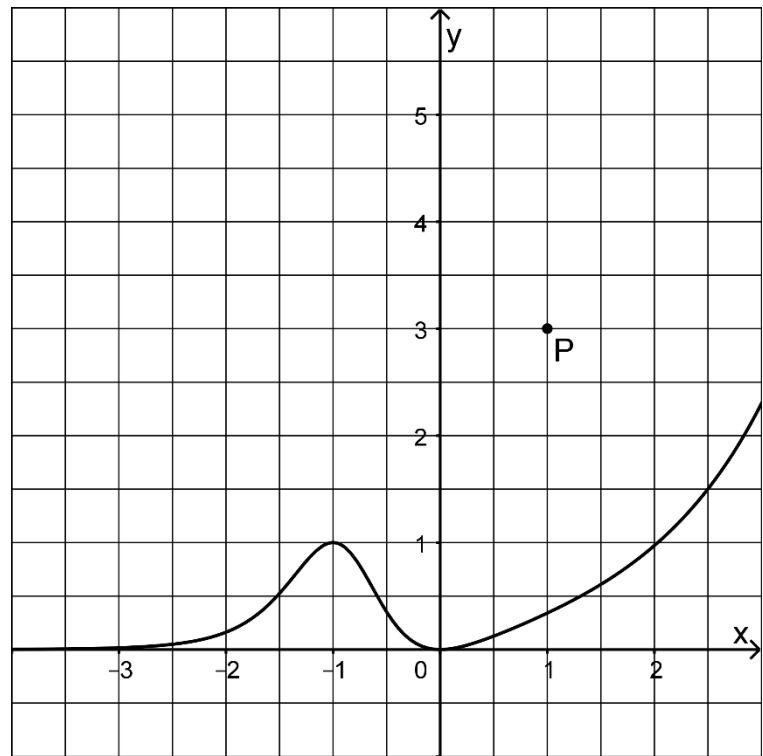


Abb. 2

- a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $h$  mit  $h(x) = -g(x - 3)$  an.
- b) Der Graph einer Stammfunktion von  $g$  verläuft durch  $P$ . Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

# Analysis

## Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

**1** Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 2}$  mit maximalem Definitionsbereich D.

**3 a)** Bestimmen Sie D und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an.

**2 b)** Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von f an.

**2** Gegeben ist die in  $\mathbb{R}_0^+$  definierte Funktion  $g: x \mapsto \sqrt{x} + 1$ .

**3 a)** Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt  $(1|g(1))$ .

**2 b)** Die Funktion g ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion  $g^{-1}$  von g ist in  $[1; +\infty[$  definiert. Bestimmen Sie einen Term von  $g^{-1}$ .

**3** Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f: x \mapsto -x^2 + 2ax$  mit  $a \in ]1; +\infty[$ . Die Nullstellen von f sind 0 und 2a.

**2 a)** Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt  $\frac{4}{3}a^3$  hat.

**3 b)** Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung 1). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a.

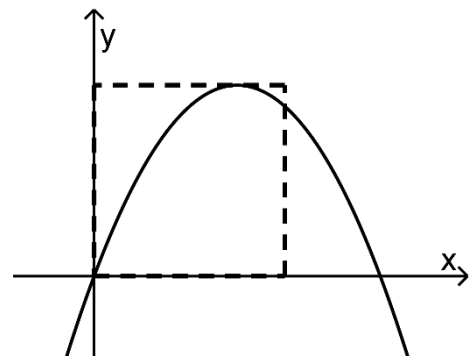


Abb. 1

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 Abbildung 2 zeigt den Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $g$ , dessen einzige Extrempunkte  $(-1|1)$  und  $(0|0)$  sind, sowie den Punkt  $P$ .

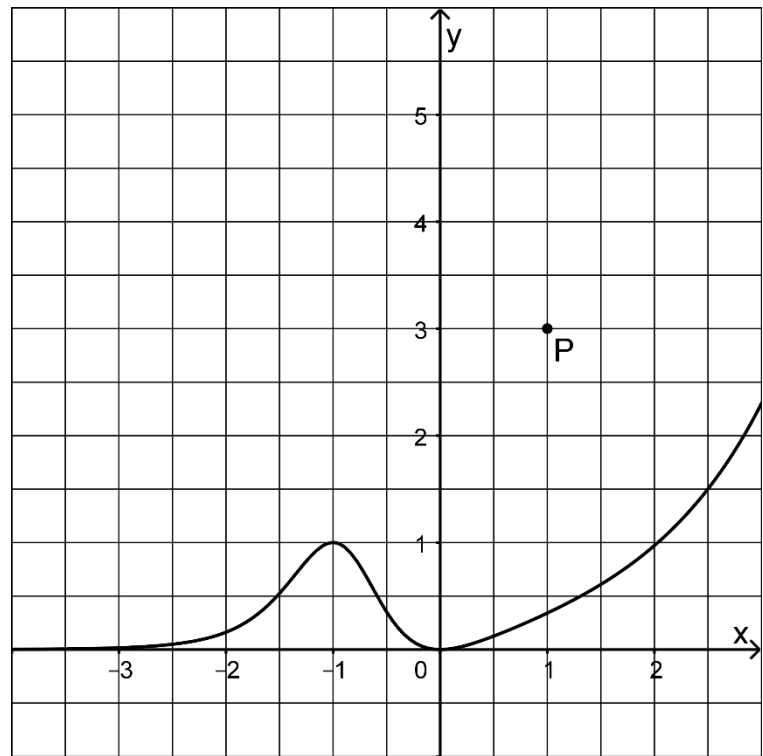


Abb. 2

- a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $h$  mit  $h(x) = -g(x - 3)$  an.
- b) Der Graph einer Stammfunktion von  $g$  verläuft durch  $P$ . Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

**Stochastik**  
**Aufgabengruppe 1**

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

*BE*

Die vier Seiten eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert. Das Tetraeder wird fünfmal geworfen.

- 2    **a)** Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term  $\left(\frac{3}{4}\right)^5$  berechnet werden kann, und begründen Sie Ihre Angabe.
- 3    **b)** Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass jede Zahl mindestens einmal erzielt wird.

5

**Stochastik**  
**Aufgabengruppe 2**

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

- |           |   |
|-----------|---|
| <b>BE</b> | In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze. |
| <b>2</b>  | <b>a)</b> Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.  |
| <b>3</b>  | <b>b)</b> Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind.  |

## Geometrie

### Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2 **a)** Zeigen Sie, dass  $g$  in der Ebene mit der Gleichung  $x_1 + x_2 + x_3 = 2$  liegt.

3 **b)** Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden  $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Weisen Sie nach, dass  $g$  und  $h_a$  für jeden Wert von  $a$  windschief sind.

5



## Geometrie

### Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

*BE*

Gegeben sind die Punkte  $A(3|5|5)$  und  $B(1|1|1)$  sowie die Geraden  $g$  und  $h$ , die sich in  $B$  schneiden. Die Gerade  $g$  hat den Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , die

Gerade  $h$  den Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- 1 **a)** Weisen Sie nach, dass  $A$  auf  $g$  liegt.
- 4 **b)** Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte  $C$  und  $D$  so, dass  $C$  auf  $h$  liegt und das Viereck  $ABCD$  eine Raute ist.

5