Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2023

Prüfungsfach:	**Mathematik** **(nichttechnische Ausbildungsrichtungen)**
Prüfungstag:	**Donnerstag, 25. Mai 2023**
Prüfungsdauer:	**9:00 Uhr – 12:00 Uhr**
Hilfsmittel:	**elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner;** **Merkhilfe LPPLUS Mathematik (Technik)**
Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule. Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.
Bewertungs-schlüssel:	

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

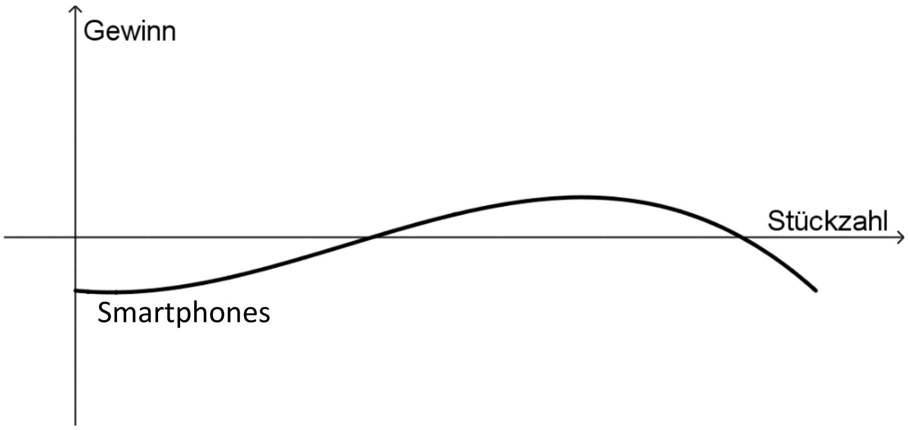
Aufgabe I

		BE
1.0	Die Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet. Die Funktion f hat bei $x = 1$ eine doppelte und bei $x = 4$ eine einfache Nullstelle. Zudem schneidet der Graph die y-Achse bei $y = 2$.	
1.1	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f und geben Sie diese auch in der allgemeinen Form an. [mögliches Ergebnis: $f(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2 - 4{,}5x + 2$]	4
1.2	Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Graph der Funktion f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung ist.	2
1.3	Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und geben Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte an.	5
1.4	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $w(x)$ der Wendetangente w im Wendepunkt $WEP(2 \mid f(2))$. [mögliches Ergebnis: $w(x) = 1{,}5x - 2$]	3
1.5	Die Wendenormale n des Graphen G_f schließt mit der Wendetangente w im Wendepunkt WEP einen rechten Winkel ein. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Wendenormalen n. Hinweis: Für zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 gilt folgender Zusammenhang: $m_1 \cdot m_2 = -1$	2
1.6	Zeichnen Sie G_f und die Wendetangente w unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und ggf. weiterer geeigneter Werte in ein gemeinsames kartesisches Koordinatensystem im Bereich $-0{,}5 \le x \le 4{,}5$.	5
1.7	G_f und die Wendetangente w schließen im I. und IV. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der graphischen Darstellung aus Aufgabe 1.6 und berechnen Sie die Maßzahl dieses Flächeninhaltes.	4
		25

Aufgabe II

		BE
2.0	Gegeben ist die Funktion f durch ihre Funktionsgleichung $$f(x)=\frac{1}{8}(x^4-2x^3-8x^2)$$ mit der eingeschränkten Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}_0^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.	
2.1	Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f und geben Sie ihre jeweilige Vielfachheit an.	**3**
2.2	„Der Graph G_f besitzt einen Tiefpunkt bei $TIP\left(\frac{3+\sqrt{73}}{4}\middle\vert f\left(\frac{3+\sqrt{73}}{4}\right)\right)$." Bestätigen Sie diese Aussage rechnerisch und geben Sie die Koordinaten des Tiefpunktes auf drei Nachkommastellen gerundet an.	**4**
2.3	Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $0\leq x\leq 4$ mithilfe der bisherigen Ergebnisse und ggf. weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem.	**4**
2.4.0	Weiter ist die quadratische Funktion p mit der Definitionsmenge $D_p=\mathbb{R}$ gegeben. Der Graph der Funktion p wird mit G_p bezeichnet und enthält die Punkte $A(2\vert-4)$, $B(3\vert 1)$ und $C(4\vert 0)$.	
2.4.1	Stellen Sie die Funktionsgleichung der Funktion p in allgemeiner Form auf. [mögliches Ergebnis: $p(x)=-3x^2+20x-32$]	**5**
2.4.2	Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes von G_p sowie den weiteren Schnittpunkt mit der x-Achse.	**3**
2.4.3	Zeichnen Sie den Graphen G_p mithilfe der bisherigen Ergebnisse in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 2.3 im Bereich $2\leq x\leq 4$ ein.	**2**
2.5	Die Graphen G_f und G_p schließen im Bereich $2\leq x\leq 4$ ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Teilaufgabe 2.3 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen gerundet.	**4**
		25

Aufgabe III

		BE
3.0	Der Händler „Phonie“ verkauft Smartphones. Die dabei erwarteten Gewinne pro Quartal werden durch die Gewinnfunktion s mit der folgenden Funktionsgleichung vorhergesagt: $s(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}11x^2 - 0{,}1x - 0{,}72$ mit $D_s = [0; 10]$ Die x-Werte sind jeweils als Vielfache der Einheit 100 Stück, die Funktionswerte als Vielfache der Einheit 100 000 Euro zu interpretieren. Ein negativer Gewinn wird als Verlust bezeichnet. Eine Skizze des Graphen der Funktion s wird nachfolgend dargestellt:  Auf das Mitführen von Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.	
3.1	Berechnen Sie s(7,5), also den Gewinn bzw. Verlust bei 750 verkauften Smartphones, und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. Zeigen Sie außerdem rechnerisch, dass der Händler bei 400 verkauften Smartphones weder Gewinn noch Verlust erzielt.	3
3.2	Der Händler führt detaillierte Planungen durch. Hierbei ist die weitere Stückzahl verkaufter Smartphones von Bedeutung, bei welcher der Händler ebenfalls weder Gewinn noch Verlust macht. Berechnen Sie diese Stückzahl.	4
3.3	Bestimmen Sie die Stückzahl an verkauften Smartphones, mit welcher der Händler den maximalen Gewinn erreicht, und berechnen Sie diesen Gewinn. Runden Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang sinnvoll.	6

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe III (Fortsetzung)

		BE
3.4.0	Der Händler möchte prüfen, ob ein Umstieg auf Tablets für ihn sinnvoller wäre. Den zu erwartenden Gewinn pro Quartal mit dem Verkauf von Tablets sagt die Unternehmensberatung mithilfe der Funktion t voraus. Diese ist durch folgende Funktionsgleichung gegeben: $$t(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}11x^2 + 0{,}3x - 2{,}32 \text{ mit } D_t = [0; 10]$$ Die x-Werte sind wieder als Vielfache der Einheit 100 Stück und die Funktionswerte als Vielfache der Einheit 100 000 Euro zu interpretieren. Um eine Entscheidung über eine Spezialisierung auf eine Gerätesorte zu treffen, zieht die Unternehmensberatung die Differenzfunktion d heran. Hierzu wird der Gewinnfunktionsterm der Smartphones vom Gewinnfunktionsterm der Tablets subtrahiert. Weiter gilt $D_d = [0; 10]$.	
3.4.1	Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Differenzfunktion d. [mögliches Teilergebnis: $d(x) = 0{,}4(x - 4)$]	2
3.4.2	Bestimmen Sie die Anzahl verkaufter Geräte, bei welcher die Differenz der erwarteten Gewinne maximal ist und berechnen Sie diese.	4
3.4.3	Zeichnen Sie die Graphen der Gewinnfunktionen s und t unter Verwendung der bisherigen und weiterer geeigneter Werte in ein gemeinsames Koordinatensystem. Maßstab: x-Achse: $1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$, y-Achse: $1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 2\text{ cm}$ Nehmen Sie anschließend zu folgender Aussage des Händlers Stellung: „Wenn ich mehr als 400 Smartphones pro Quartal verkaufe, wäre für mich ein Umstieg auf den Verkauf von Tablets sinnvoll.“	6
		25

Aufgabe IV

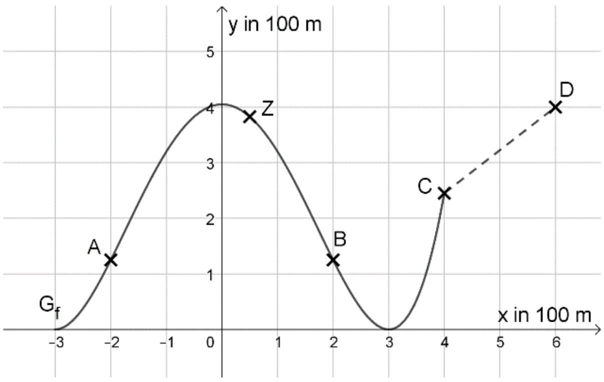
BE

4.0 Nachfolgende Abbildung zeigt den Ausschnitt einer ebenen Outdoor-Kartbahn. Um bei Übungen die Position des Karts genau beschreiben zu können, wird ein Koordinatensystem wie unten dargestellt, festgelegt. Die Werte für x und y sind in der Einheit 100 m zu interpretieren.

Der Ausschnitt der Bahn wird durch den Graphen G_f einer Funktion 4. Grades beschrieben. Für die zugehörige Funktionsgleichung gilt:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \text{ mit } D_f = [-3; 4]$$

Bei $x_Z = 0{,}5$ führt die Bahn an der Zuschauertribüne im Punkt Z vorbei. Außerdem sind in den Punkten $A(-2|1{,}25)$ und B Messsensoren in der Bahn verbaut. Im Punkt $W(\sqrt{3}\,|\,1{,}8)$ ist die Krümmung der Bahn null. Der Abstand zwischen den beiden Messpunkten A und B beträgt in x-Richtung 400 Meter.



Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Die Breite der Fahrbahn soll in den folgenden Ausführungen nicht berücksichtigt werden.

4.1 Stellen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f auf. **5**

[mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{20}(x^4 - 18x^2 + 81)$]

4.2 Begründen Sie, dass der Verlauf der Kartbahn einen Ausschnitt eines achsensymmetrischen Graphens darstellt, und geben Sie die Koordinaten des Messpunktes B an. **2**

4.3 Auf der gegebenen Rennstrecke befindet sich zusätzlich zu W ein zweiter Wendepunkt. Weisen Sie dies rechnerisch nach und geben Sie die Lenkbewegung des Fahrers beim Passieren dieser Stelle an. **4**

4.4 Im Punkt $C(4|f(4))$ steht ein Werbeschild des Bahnbetreibers. Von dort verläuft bis zum Punkt $D(6|4)$ eine gerade Zufahrtsstraße zur Bahn (siehe gestrichelte Linie in der Skizze). Diese Straße stellt einen Ausschnitt aus dem Graphen der Funktion b dar. **4**

Zeigen Sie, dass die Funktion b die Gleichung $b(x) = \frac{1}{20}\left(\frac{31}{2}x - 13\right)$ besitzt und berechnen Sie Straßenlänge auf ganze Meter gerundet.

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

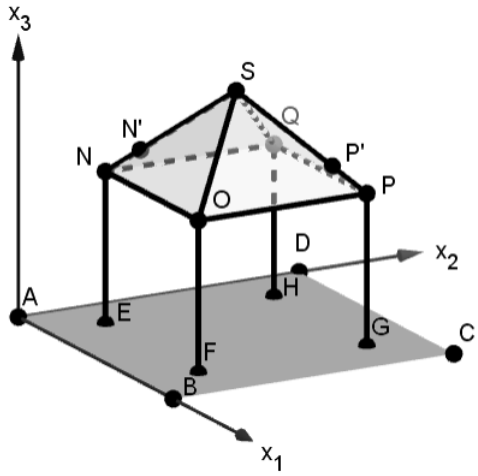
Aufgabe IV (Fortsetzung)

		BE
4.5.1	Berechnen Sie $f'(3)$ und geben Sie damit die Fahrtrichtung des Karts bei $x = 3$ an.	**2**
4.5.2	Die eingeschlossene Fläche der Bahn mit der x-Achse zwischen $x = -3$ und $x = 3$ soll mit Rollrasen ausgelegt werden. Berechnen Sie den Flächeninhalt in Quadratmeter.	**3**
4.6	Die 30 m lange, gerade verlaufende Zuschauertribüne hat am Punkt Z ihre Mitte und verläuft tangential zur Kartbahn. Geben Sie die Koordinaten des Punktes Z an und berechnen Sie mithilfe der Tangentengleichung die Koordinaten des Anfangs- und Endpunktes der Tribüne. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. [mögliches Teilergebnis: $z(x) = -\frac{1}{8}\left(7x - \frac{273}{8}\right)$]	**5**
		25

Aufgabe V

BE

5.0 Für eine quadratische Terrasse soll ein Pavillon entworfen werden. Der Grundriss des Pavillons soll ebenfalls ein Quadrat sein – mit der Seitenlänge 3 Meter. Das Dach des Pavillons wird als regelmäßige vierseitige Pyramide geplant. Die Gesamthöhe des Pavillons wird auf 4 Meter festgesetzt. Nebenstehende, nicht maßstabsgetreue Abbildung zeigt modellhaft diesen Pavillon.



Die Eckpunkte der Terrasse ABCD haben die Koordinaten A(0|0|0), B(5|0|0), C(5|5|0) und D(0|5|0).

Vom Pavillondach NOPQS sind die Eckpunkte N(1|1|2,5), O(4|1|2,5) und P(4|4|2,5) bekannt.

Die Verankerungen der senkrechten Stützen sind in der Abbildung mit E, F, G und H bezeichnet.

Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

5.1 Der Pavillon soll mittig auf der Terrasse stehen. Geben Sie die Koordinaten der Verankerungen E, F, G und H der Stützen an. **2**

5.2 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Koordinaten der Dachspitze S gilt: **2**

$$S(2,5|2,5|4)$$

5.3 Weisen Sie nach, dass die Dachkante $\overline{PS}$ eine Länge von ca. 2,60 m besitzt. **2**

Hinweis: Dieser gerundete Wert darf für weitere Rechnungen verwendet werden.

5.4 Alle Kanten des Pavillons bestehen aus Aluminiumstangen. Für den Kauf dieser Stangen (vgl. Abbildung 5.0) wird dessen Gesamtlänge benötigt. Ermitteln Sie diese. **2**

5.5 Das Pavillondach wird aus wasserundurchlässigem Material gefertigt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des zu kaufenden Materials unter Berücksichtigung von 10% Materialzugabe. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Quadratmeter. **4**

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe V (Fortsetzung)

		BE
5.6	Die Dachneigung entscheidet, ob der Pavillon auch im Winter benutzt werden kann. Ab einem Neigungswinkel des Daches von mindestens 40° wird das Abrutschen von Schnee ermöglicht. Berechnen Sie das Maß des Neigungswinkels der Fläche NOS und beurteilen Sie, ob der Pavillon im Winter stehenbleiben darf.	4
5.7	Weiter wird angedacht, den Pavillon im Winter zu beheizen. Zur Vorbereitung der Heizperiode werden die Kosten abgeschätzt. Berechnen Sie hierzu das Volumen des Pavillons.	3
5.8	An den Punkten N' und P' werden Halterungen für die Deckenbeleuchtung montiert. Laut Hersteller sollten diese zur optimalen Ausleuchtung einen Abstand von mindestens 3 Metern zueinander haben. Der Punkt N' bzw. P' liegt 0,65 Meter vom Eckpunkt N bzw. P entfernt in Richtung S (vgl. Abbildung 5.0). Überprüfen Sie nach Berechnung der Koordinaten der Punkte N' und P', ob die Herstellerangaben erfüllt sind.	6
		25