Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2023

Prüfungsfach:	**Mathematik** **(technische Ausbildungsrichtung)**
Prüfungstag:	**Donnerstag, 25. Mai 2023**
Prüfungsdauer:	**9:00 Uhr – 12:00 Uhr**
Hilfsmittel:	**elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner;** **Merkhilfe LPPLUS Mathematik (Technik)**
Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule. Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.
Bewertungsschlüssel:	

BE	100-86	85-71	70-56	55-41	40-20	19-0
Note	1	2	3	4	5	6

Aufgabe I

		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion f mit ihrer Funktionsgleichung $$f(x) = \frac{0{,}5x^2-2x}{x+1} \text{ mit } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$ Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_f. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf zwei Nachkommastellen.	
1.1	Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.	2
1.2	Ermitteln Sie rechnerisch das Verhalten der Funktion f an den Rändern des Definitionsbereiches. Bestimmen Sie zudem die Gleichungen aller Asymptoten von G_f. [mögliches Zwischenergebnis: $f(x) = 0{,}5x - 2{,}5 + \frac{2{,}5}{x+1}$]	6
1.3	Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f. Geben Sie auch die maximalen Monotonieintervalle von G_f an. [mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{0{,}5x^2+x-2}{(x+1)^2}$]	7
1.4	Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Funktionsgraphen G_f im Punkt $P(0{,}5\|f(0{,}5))$.	2
1.5	Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und ggf. weiterer geeigneter Punkte sowie alle Asymptoten im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein (y-Bereich: $-7 \leq y \leq 4$).	5
1.6	Der Graph G_f, die x-Achse sowie die Geraden $x = 0$ und $x = 4$ schließen im vierten Quadranten ein endliches Flächenstück A ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts von A.	3
		25

Aufgabe II

		BE
2.0	Gegeben sind die reellen Funktionen g und h in ihrer jeweils maximalen Definitionsmenge D_g und D_h durch die folgenden Funktionsgleichungen: $$g(x) = \frac{5-2x}{\ln(2+x)} \quad \text{mit } x \in D_g$$ $$h(x) = \ln\left(\frac{5-2x}{2+x}\right) \quad \text{mit } x \in D_h$$	
2.1	Gegeben sind folgende Aussagen: (A) An der Nullstelle des Zählers ist die Funktion nicht definiert. (B) An der Nullstelle der Argumentfunktion des ln ist die Funktion nicht definiert. (C) Die Nullstelle des Zählers ist eine Nullstelle der Funktion. (D) Der x-Wert, für den die Argumentfunktion des ln den Wert 1 annimmt, ist eine Nullstelle der Funktion. Geben Sie für jede der Aussagen an, ob diese • nur für die Funktion g • nur für die Funktion h • für beide Funktionen oder • für keine der beiden zutrifft.	4
2.2	Bestimmen Sie jeweils die maximale Definitionsmenge D_g und D_h der Funktionen g und h.	6
2.3.0	In den folgenden Aufgaben wird nun die Funktion h mit ihrem Graphen G_h genauer betrachtet:	
2.3.1	Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion h.	3
2.3.2	Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Funktion h kein relatives Extremum besitzt, jedoch eine Wendestelle. Berechnen Sie auch die Koordinaten des zugehörigen Wendepunktes von G_h auf zwei Nachkommastellen genau. [mögliches Zwischenergebnis: $h''(x) = 9 \cdot \frac{-4x+1}{(5-2x)^2 \cdot (2+x)^2}$]	8
2.3.3	Zeichnen Sie den Graphen G_h der Funktion h im Bereich von $-2 < x < 2{,}5$ mithilfe der vorliegenden Ergebnisse sowie ggf. weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem.	4
		25

Aufgabe III

		BE
3.0	In einem Teich breitet sich eine Algenpopulation aus. Diese beeinträchtigt die Fischzucht durch die sinkende Sauerstoffkonzentration im Teich. Die Ausbreitung soll mathematisch untersucht werden. Diese wird durch die Funktion A_1 modelliert, deren Funktionsgleichung lautet: $$A_1(t) = 2 \cdot e^{kt} \text{ mit } t \in [0; \infty[$$ Dabei gibt $A_1(t)$ die von Algen bedeckte Fläche in der Einheit m^2 an und t in allen folgenden Teilaufgaben die vergangene Zeit in Tagen. $t = 0$ stellt den Zeitpunkt der Entdeckung des Algenteppichs dar. Auf das Mitführen von Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf drei Nachkommastellen.	
3.1	50 Tage nach Entdeckung der Algen bedecken diese eine Fläche von $14{,}05\ m^2$. Zeigen Sie durch Berechnung von k, dass gilt: $$A_1(t) = 2 \cdot e^{0{,}039\,t}$$	3
3.2	Berechnen Sie die von Algen bedeckte Fläche zum Zeitpunkt der Entdeckung sowie nach 60 Tagen.	2
3.3	Bestimmen Sie die algenbedeckte Teichfläche für $t \to \infty$ und beurteilen Sie dieses Ergebnis im Sachzusammenhang.	2
3.4.0	In einem Naturschutzgebiet liegt ein Teich mit gleicher Oberfläche. In diesem möchte man dem Algenwachstum entgegenwirken und ergreift hierzu verschiedene Maßnahmen. Die Funktionsgleichung, welche das Algenwachstum hier beschreibt, kann wie folgt modelliert werden: $$A_2(t) = 2 + \frac{39}{500} t \cdot e^{-0{,}010\,t} \quad \text{mit} \quad t \in [0; \infty[$$	
3.4.1	Begründen Sie, dass nach diesem Modell die von Algen bedeckte Fläche $2\ m^2$ nie unterschreiten kann.	2
3.4.2	Berechnen Sie den Zeitpunkt für die maximale Algenbedeckung und geben Sie die Maßzahl der bedeckten Teichfläche an. [mögliches Zwischenergebnis: $A_2{}'(t) = e^{-0{,}010\,t}\left(\frac{39}{500} - \frac{39}{50000} t\right)$]	6
3.4.3	Berechnen Sie die Wendestelle von $A_2(t)$ und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.	5
3.4.4	Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen A_1 im Bereich $0 \leq t \leq 40$ und A_2 im Bereich $0 \leq t \leq 240$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. (Maßstab: t-Achse: 20 Tage ≙ 1 cm; A-Achse: $1\ m^2$ ≙ 1 cm)	5
		25

Aufgabe IV

BE

4.0 Ein Unternehmen produziert Transportboxen für Hunde.
Die Fertigungskosten können näherungsweise durch die Funktion k mit der folgenden Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3240 \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Ermittelte Kosten für die produzierten Boxen:

x	10	30	190
k(x)	4250	5610	39530

Der Wert x gibt die Anzahl der pro Tag hergestellten Transportboxen an, k(x) gibt die zugehörigen Fertigungskosten in Euro an.
Es können maximal 190 Stück pro Tag hergestellt werden, deshalb gilt der Definitionsbereich $D = [0; 190]$. Dieser gilt für alle in der Aufgabe verwendeten Funktionen.
Die Anzahl der produzierten Transportboxen ist stets genau auf die Nachfrage ausgerichtet. Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden.

4.1 Bestimmen Sie die Zahlenwerte für a, b und c und geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung an. **5**

[mögliches Teilergebnis: $k(x) = 0{,}01x^3 - 1{,}5x^2 + 115x + 3240$]

4.2 Die Funktionsgleichung der Einnahmen setzt sich aus dem Verkaufspreis p (pro Box) multipliziert mit der verkauften Anzahl x an Transportboxen zusammen: **3**

$$e(x) = p \cdot x$$

Bei 30 verkauften Transportboxen pro Tag decken die Einnahmen genau die Fertigungskosten.
Ermitteln Sie rechnerisch den Verkaufspreis p und geben Sie die Gleichung der Funktion e an.

[mögliches Teilergebnis: $e(x) = 187 \cdot x$]

4.3 Der Gewinn des Unternehmens ergibt sich aus der Differenz aus den Einnahmen und den Fertigungskosten. **7**
Geben Sie die Gleichung der Gewinnfunktion g an.
Berechnen Sie anschließend den maximal möglichen Gewinn an einem Tag.

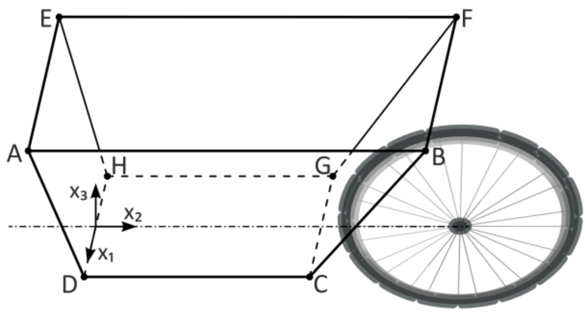
[mögliches Zwischenergebnis: $g(x) = -0{,}01x^3 + 1{,}5x^2 + 72x - 3240$]

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe IV (Fortsetzung)

		BE
4.4	Für $x = 30$ besitzt die Funktion g eine Nullstelle. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen von g und interpretieren Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang.	**5**
4.5	Zeichnen Sie den Graphen G_k der Funktion k und den Graphen G_g der Funktion g für $0 \leq x \leq 190$ unter Verwendung der bisherigen und ggf. weiterer Ergebnisse in ein gemeinsames Koordinatensystem. Markieren Sie danach in Ihrer Zeichnung die x-Intervalle, in welchen die Fertigungskosten die Einnahmen übersteigen. (Maßstab: x-Achse: 1 cm $\triangleq$ 20 Stück; Ordinaten-Achse: 1 cm $\triangleq$ 4000 EUR)	**5**
		25

Aufgabe V

		BE
5.0	Für ein Lastenfahrrad soll eine Wanne aus Mehrschichtplatten konzipiert werden. Die Fahrtrichtung wird in Orientierung der x_2-Achse festgesetzt und die Wanne spiegelsymmetrisch zur x_2-x_3-Ebene konstruiert. Der Fahrradhersteller hat untenstehende, nicht maßstabsgetreue Skizze der wesentlichen Geometrie der Wanne vorgeschlagen, welche durch folgende Punkte festgelegt wird: $A(40\|10\|50)$, $B(40\|80\|50)$, $C(30\|60\|0)$ und $D(30\|0\|0)$. Die Koordinaten stellen Angaben in der Einheit cm dar.  Runden Sie Ihre Ergebnisse ggf. auf eine Nachkommastelle.	
5.1	Vor der Konstruktion werden die Dimensionen der Wanne hinsichtlich Nutzerfreundlichkeit überprüft. Ermitteln Sie hierzu die Längen von $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$.	2
5.2	Für den Materialbedarf werden die Flächeninhalte der Mehrschichtplatten ermittelt. Berechnen Sie exemplarisch den Flächeninhalt der Seitenplatte DCBA.	4
5.3	Die Kanten der Platten sollen auf Gehrung geschnitten werden. Hierzu müssen die nötigen Winkel bestimmt werden. Bestimmen Sie zuerst eine Gleichung der Ebene M, die durch die Punkte A, B, C und D festgelegt wird, in Koordinatendarstellung. Berechnen Sie anschließend den Winkel α, in welchem die Seitenplatte DCBA zur Bodenplatte DCGH steht. [mögliches Teilergebnis: $M: 5x_1 - x_3 - 150 = 0$]	5
5.4	Als besonderes Erkennungsmerkmal soll auf dem Seitenplatte DCBA von A nach C sowie von D nach B je eine Linie gezeichnet werden. Am Schnittpunkt S der beiden Linien wird eine Niete mit dem Firmenlogo angebracht. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S.	5

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Aufgabe V (Fortsetzung)

		BE
5.5	An den Seitenplatten DCBA und HGFE soll genau mittig zwischen den Punkten C und D und 40 cm oberhalb der Bodenplatte DCGH quer zur Fahrtrichtung (d. h. in x_1-Richtung) eine Stange zur Stabilisierung montiert werden. Berechnen Sie die Länge dieser Stange sowie die Koordinaten der Montagepunkte an den beiden Seitenplatten.	**4**
5.6	Die Frontplatte liegt in der Ebene P mit $P\colon 5x_2 - 2x_3 - 300 = 0$, welche durch die Punkte B, C und G eindeutig bestimmt ist (Herleitung der Ebenengleichung nicht erforderlich). Die Achse des Vorderrades liegt zwischen den Punkten $K(5\vert 90\vert 0)$ und $L(-5\vert 90\vert 0)$. Prüfen Sie durch Rechnung, ob ein Vorderrad mit einem Durchmesser von 55 cm dort montiert werden kann, ohne dass es an der Frontplatte schleift.	**5**
		25