FOSBOS

Fachabiturprüfung 2023

zum Erwerb der Fachhochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Montag, 22. Mai 2023, 09:00 Uhr – 10:00 Uhr

Mathematik

Ausbildungsrichtung Technik

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

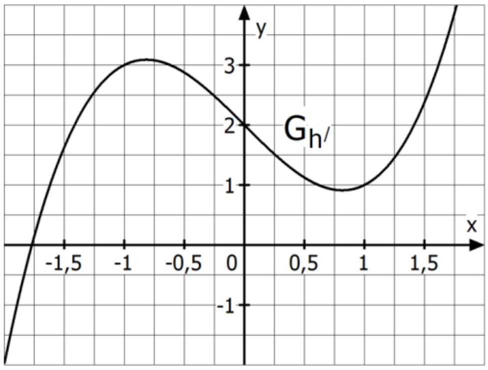
1.0 Von einer in $D_f = \mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f ist die Funktionsgleichung der zweiten Ableitungsfunktion f'' bekannt: $f''(x) = 3x^2 - 3$. Der Graph von f hat den Wendepunkt $W(1|y_W)$, die Gleichung der zugehörigen Wendetangente lautet $y = 2$.

1 **1.1** Begründen Sie, warum es sich bei dem Wendepunkt W um einen Terrassenpunkt handelt.

6 **1.2** Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von f.

2.0 Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen $G_{h'}$ der ersten Ableitungsfunktion h' einer ganzrationalen Funktion h. Für die Definitionsmengen gilt: $D_h = D_{h'} = \mathbb{R}$.

h' ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Die Graphen von h' und h besitzen an der Stelle $x_0 = 0$ einen gemeinsamen Punkt. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.



3 **2.1** Gegeben sind die folgenden Aussagen zum Graphen der Funktion h.

Kreuzen Sie für jede Aussage an, ob diese **richtig** oder **falsch** ist, oder ob aufgrund der vorliegenden Informationen keine Angabe über den Wahrheitsgehalt der Aussage möglich ist (**nicht entscheidbar**).

Hinweis zur Bewertung:
Mehr als ein gesetztes Kreuz pro Aussage führt zu 0 BE als Bewertung für die entsprechende Aussage. Für ein korrekt gesetztes Kreuz erhält man +1 BE, für ein falsch gesetztes Kreuz erhält man 0,5 BE Abzug. Im ungünstigsten Fall wird die gesamte Teilaufgabe mit 0 BE bewertet.

Aussagen	**richtig**	**falsch**	**nicht entscheidbar**
G_h besitzt einen Hochpunkt.			
G_h besitzt genau einen absoluten Extrempunkt.			
G_h ist in $[-0{,}5\,;\,0{,}5]$ rechtsgekrümmt.			

6 **2.2** Begründen Sie für die beiden folgenden Aussagen jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist oder ob eine Angabe über den Wahrheitsgehalt der Aussage aufgrund der vorliegenden Informationen nicht möglich ist.

Aussage 1: „G_h verläuft für $x > 0$ vollständig im I. Quadranten des Koordinatensystems.“

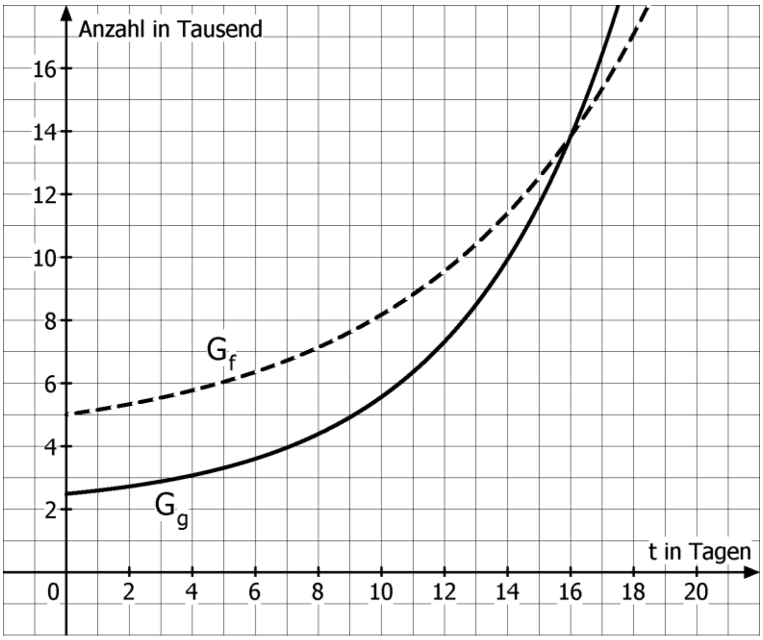
Aussage 2: „Der Graph der 2. Ableitungsfunktion h'' ist in ganz $\mathbb{R}$ linksgekrümmt.“

2 **2.3** Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Tangente an G_h an der Stelle $x_0 = 0$.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3.0 In zwei landwirtschaftlichen Betrieben mit Legehennen in Frankreich und Großbritannien ist eine Krankheit ausgebrochen. Die Gesamtzahl an insgesamt erkrankten Legehennen im jeweiligen Betrieb wird durch die Funktionen f (Betrieb in Frankreich) und g (Betrieb in Großbritannien) in Einheiten von 1000 in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen modelliert. Der Zeitpunkt $t_0 = 0$ bezieht sich dabei auf den Zeitpunkt der ersten Zählung erkrankter Legehennen. Die folgende Abbildung zeigt Ausschnitte der zugehörigen Funktionsgraphen G_f und G_g.



In beiden Ländern wurden unverzüglich nach der ersten Zählung unterschiedliche Maßnahmen zur Bekämpfung der Krankheit ergriffen. Dies führte dazu, dass die Ausbreitung des Erregers in den beiden Ländern mit unterschiedlicher Geschwindigkeit erfolgte.

1 **3.1** Geben Sie an, wie viele Legehennen in etwa zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im Betrieb in Frankreich mehr erkrankt waren als im Betrieb in Großbritannien.

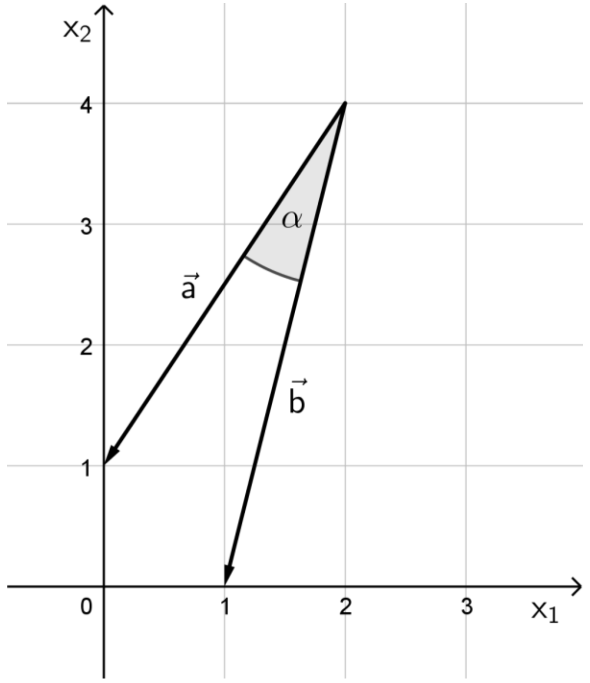
3 **3.2** Nach 16 Tagen ist die Anzahl der erkrankten Legehennen in beiden Betrieben gleich groß, die momentanen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Krankheit sind aber unterschiedlich. In dem Betrieb in Frankreich beträgt die momentane Ausbreitungsgeschwindigkeit nach 16 Tagen ungefähr 1400 Legehennen pro Tag. Ermitteln Sie näherungsweise, um wieviel die momentane Ausbreitungsgeschwindigkeit der Krankheit zu diesem Zeitpunkt in Großbritannien größer ist als in Frankreich.

22

Lineare Algebra und analytische Geometrie: siehe folgende Seite

BE

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$ ist je ein Repräsentant der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben.



3 **1.1** Der Winkel α zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann mit der Gleichung $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ berechnet werden. In einer der drei nachfolgenden Gleichungen ist der Term $\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ richtig berechnet. Entscheiden Sie begründet, welche der untenstehenden Gleichungen die richtige ist.

I) $\cos(\alpha) = \frac{12}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{18}}$ **II)** $\cos(\alpha) = \frac{14}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}}$ **III)** $\cos(\alpha) = \frac{14}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}$

1 **1.2** Zeichnen Sie einen Repräsentanten des Vektors $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ in das Koordinatensystem von 1.0 ein.

2 **1.3** Zeigen Sie rechnerisch, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind.

2.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die drei Punkte $A(2|0|0)$, $B(5|0|0)$ und $C(4|1|-1)$ gegeben.

3 **2.1** Zeigen Sie, dass der Winkel an der Ecke C im Dreieck ABC ein rechter Winkel ist.

3 **2.2** Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

12

Fachabiturprüfung 2023

zum Erwerb der Fachhochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Montag, 22. Mai 2023, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

Mathematik

Ausbildungsrichtung Technik

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Lineare Algebra und analytische Geometrie* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

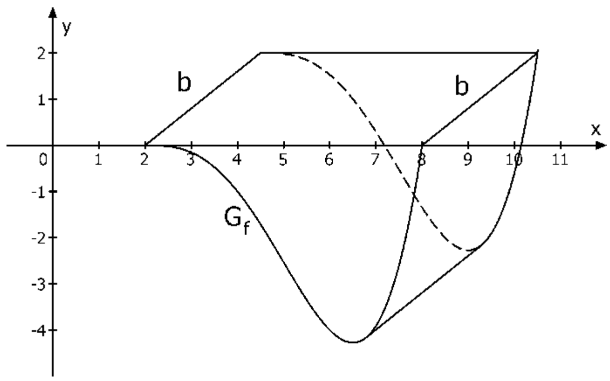
1.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{32}\left(x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 104x + 64\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph G_f in einem kartesischen Koordinatensystem besitzt bei $x = 2$ einen Terrassenpunkt.
Nur im Bereich $2 \le x \le 8$ beschreibt der Graph G_f dabei den Boden eines Teichbeckens im Querschnitt. Das Teichbecken ist bis zur x-Achse vollständig mit Wasser gefüllt. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter.

Auf das Mitführen der Einheiten kann während der Berechnungen verzichtet werden.

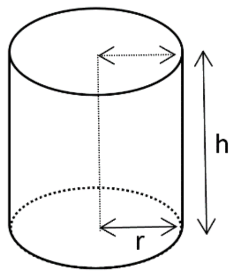
8 **1.1** Berechnen Sie die maximale Wassertiefe des Teichbeckens auf cm genau.

6 **1.2** Ermitteln Sie die Stelle, an welcher der Boden des Teichbeckens im Bereich $]2;6{,}5[$ das stärkste Gefälle aufweist. Geben Sie das Gefälle an dieser Stelle an.

5 **1.3** Das Teichbecken hat eine konstante Breite b von 4,0 m (siehe Grafik). Berechnen Sie das Volumen V des Wassers im Teichbecken, wenn das Teichbecken vollständig mit Wasser gefüllt ist.



1.4.0 Damit das Teichwasser keimfrei bleibt, soll eine Chlormischung zugesetzt werden, die in zylinderförmigen Dosen aus Blech verkauft wird.
Der Hersteller dieser Dosen möchte pro Dose nicht mehr als 600 cm^2 Blech verbrauchen.
Der Dosenradius soll dabei nicht kleiner als 1 cm und nicht größer als 9 cm sein.



4 **1.4.1** Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, welche das Dosenvolumen $V(r)$ in Abhängigkeit vom Dosenradius r angibt, wenn pro Dose inklusive Boden und Deckel genau 600 cm^2 Blech verwendet werden.
[mögliches Ergebnis: $V(r) = -\pi r^3 + 300r$]

6 **1.4.2** Bestimmen Sie auf mm genau den Radius r, bei dem das Dosenvolumen aus 1.4.1 maximal wird.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.0 Die Zugabe von Chlor in das Beckenwasser eines Schwimmbads soll die Vermehrung von Bakterien hemmen. Für eine genauere Untersuchung, ab welchem Zeitpunkt die Zugabe von Chlor notwendig ist, wird etwas Beckenwasser entnommen und im Labor untersucht. Dort wurde für einen Bakterienstamm ohne Zugabe von Chlor ein beschränktes Wachstum beobachtet. Das heißt, dass sich die Bakterienkonzentration in $\frac{\text{KbE}}{\text{ml}}$ (Anzahl der koloniebildenden Einheiten pro ml Wasser) als Funktionswerte der Funktion $B: t \mapsto 200 + (B_0 - 200) \cdot e^{-kt}$ mit $B_0, k \in \mathbb{R}^+$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ modellieren lässt.
Dabei gibt t die Zeit in Stunden an, die seit Beobachtungsbeginn vergangen ist. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Rechnungen verzichtet werden.

4 **2.1** Für die momentane Wachstumsrate $\dot{B}$ der Funktion B gilt:

$\dot{B}(t) = k \cdot (200 - B(t))$ (*)

Bei der Untersuchung im Labor betrug 2,75 Stunden nach Beobachtungsbeginn die Bakterienkonzentration $30\,\frac{\text{KbE}}{\text{ml}}$ und die momentane Wachstumsrate $\dot{B}$ war zu diesem Zeitpunkt $8{,}5\,\frac{\text{KbE}}{\text{ml}}$ pro Stunde.

Berechnen Sie mithilfe der Gleichung (*) die Konstante k und bestimmen Sie anschließend die Konstante B_0. Runden Sie sinnvoll.

2.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $k = 0{,}05$ und $B_0 = 5$.

4 **2.2.1** Im Beckenwasser wird ab einem Wert von $100\,\frac{\text{KbE}}{\text{ml}}$ die Zugabe von Chlor empfohlen.
Bestimmen Sie rechnerisch auf eine Nachkommastelle genau, zu welchem Zeitpunkt dieser Wert von dem im Labor beobachteten Bakterienstamm erreicht wurde.

3 **2.2.2** Zeichnen Sie für $0 \leq t \leq 50$ den Graphen G_B sowie seine Asymptote in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstäbe: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 5\,\text{h}$; $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 25\,\frac{\text{KbE}}{\text{ml}}$

3 **2.2.3** Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen nachvollziehbar einen Näherungswert für die momentane Wachstumsrate der Bakterienkonzentration 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

43

BE

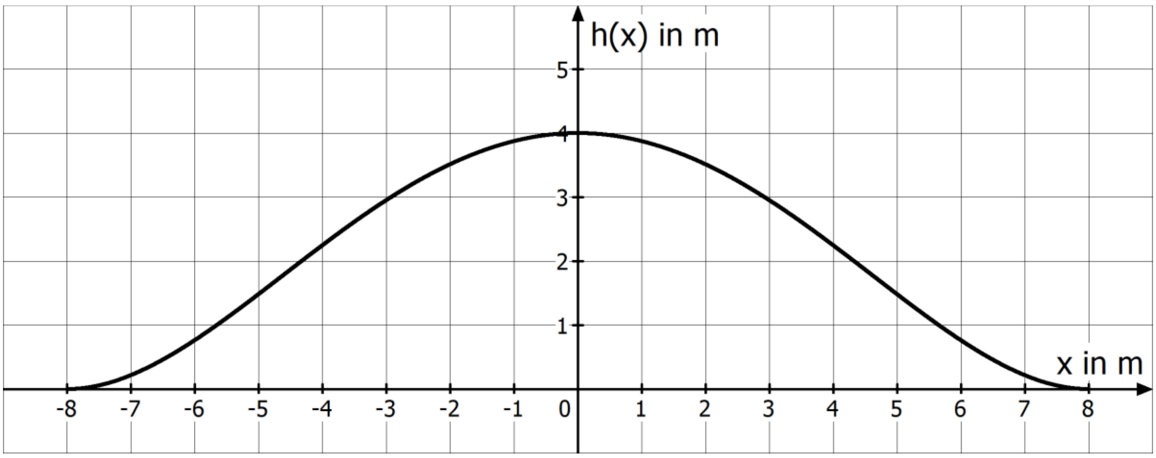
1.0 Die Funktion f_a mit der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ besitzt die erste Ableitungsfunktion f_a' mit der Funktionsgleichung $f_a'(x) = \frac{1}{8}x\left(x^2 - a\right)$.
Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_{f_a} bezeichnet.

3 **1.1** Begründen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ der Graph von f_a achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft.

4 **1.2** Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Stellen, an denen der Graph von f_a eine waagrechte Tangente besitzt.

2.0 In unmittelbarer Nähe eines Flusses wurde zum Schutz der Anwohner vor Hochwasser ein Damm auf einem ebenen Gelände errichtet. Von der Vogelperspektive aus betrachtet verläuft der Damm geradlinig und hat eine Länge von 800 Meter. Im Querschnitt hat der Damm das unten abgebildete Profil, welches durch den zur y-Achse symmetrischen Graphen der Funktion $h: x \mapsto \frac{1}{1024}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + 4$ mit der Definitionsmenge $D_h = [-8; 8]$ beschrieben werden kann.
Die x-Koordinaten stehen für Längenangaben in der Einheit Meter. Die Funktionswerte von h geben die Höhe des Damms gegenüber dem ebenen Gelände in der Einheit Meter an.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse gegebenenfalls sinnvoll.



5 **2.1** Der Bau des Dammes hat 2,5 Millionen Euro gekostet. Berechnen Sie das Volumen sowie die durchschnittlichen Kosten in Euro pro Kubikmeter des Dammes.
Hierzu benötigte Werte dürfen obiger Abbildung entnommen werden.

8 **2.2** Aus bautechnischen Gründen darf das Profil des Dammes im Querschnitt um maximal 40° gegenüber dem planen Grundstück geneigt sein. Berechnen Sie die maximale Steigung des Profils und überprüfen Sie damit, ob diese Bauvorgabe eingehalten wurde.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

6 **2.3** Nach verschiedenen Hochwasserfreilegungen legt das zuständige Wasserwirtschaftsamt fest, dass eine Dammhöhe von 3,75 Meter ausreicht, um den entsprechenden Hochwasserschutz zu gewährleisten.
Daher wird nun geplant, den Damm im oberen Bereich über die gesamte Breite abzuflachen und dadurch einen Geh- und Radweg zu realisieren, der über der gesamten Strecke auf konstanter Höhe 3,75 Meter verläuft.
Berechnen Sie die maximal mögliche Breite dieses Geh- und Radwegs.

3.0 In einem kleinen Wald mit einem festen Baumbestand hat man am 1. Februar 2015 festgestellt, dass 160 Bäume vom Borkenkäfer befallen waren. Da man beschlossen hat, zu Forschungszwecken die Ausbreitung des Borkenkäfers in diesem Wald zu untersuchen, wurde die Anzahl der Bäume in diesem Wald stets konstant gehalten. Das heißt, dass keine neuen Bäume gepflanzt und vom Borkenkäfer befallene Bäume nicht gefällt wurden. Genau zwei Jahre später hat man in diesem Wald dann insgesamt 289 Bäume gezählt, die vom Borkenkäfer befallen waren.

Die Anzahl der vom Borkenkäfer befallenen Bäume in Abhängigkeit von der Zeit t mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ wird näherungsweise durch die Modellfunktion N beschrieben. Der jeweilige Funktionswert $N(t)$ gibt die Anzahl der vom Borkenkäfer befallenen Bäume zum Zeitpunkt t an, wobei t die seit Beobachtungsbeginn am 1. Februar 2015 verstrichene Zeit in Jahren angibt.

Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls sinnvoll. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

4 **3.1** Bestimmen Sie c und d so, dass die Funktion $N: t \mapsto d - 660 \cdot e^{-c \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $c, d \in \mathbb{R}^+$ eine geeignete Modellfunktion ist.

3.2.0 Im Folgenden wird vereinfachend angenommen: $N(t) = 820 - 660 \cdot e^{-0{,}11 \cdot t}$

5 **3.2.1** Man nimmt an, dass auf lange Sicht alle Bäume des Waldes vom Borkenkäfer befallen werden. Geben Sie an, wie viele Bäume demnach in dem Waldstück insgesamt vorhanden sind, und ermitteln Sie anschließend, in welchem Kalenderjahr nach dem Modell erstmals mehr als 70 % des Baumbestands vom Borkenkäfer befallen sind.

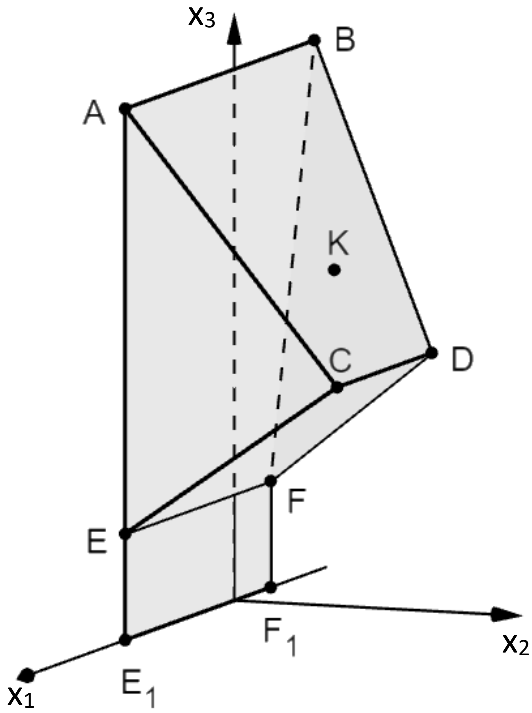
3 **3.2.2** Ermitteln Sie, in welchem Kalenderjahr der Borkenkäfer den Wald befallen hat, wenn man annimmt, dass die Modellfunktion N den Verlauf der befallenen Bäume bereits ab Beginn des Käferbefalls beschreibt.

5 **3.2.3** Zeigen Sie durch algebraische Umformungen, dass gilt: $N(t+1) - N(t) \approx 69 \cdot 0{,}9^t$
Geben Sie die Bedeutung dieses Terms im Sachkontext an.

43

BE

1.0 In einer Kletterhalle für Kinder soll eine Wand mit Überhang gebaut werden, welche modellhaft in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ betrachtet wird. Der Boden der Kletterhalle liegt in der x_1-x_2-Koordinatenebene. Die Ebene G, die den Überhang bildet, ist durch die Punkte $E(15|0|5)$, $C(12|9|12)$ und $D(-1|9|12)$ festgelegt. Zudem sind die Punkte $A(15|0|25)$, $B(-11|0|25)$ und $F(-2|0|5)$ gegeben. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Dezimeter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnung kann verzichtet werden. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.



5 **1.1** Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene G in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von G im Koordinatensystem.
[Mögliches Ergebnis: G: $7x_2 - 9x_3 + 45 = 0$]

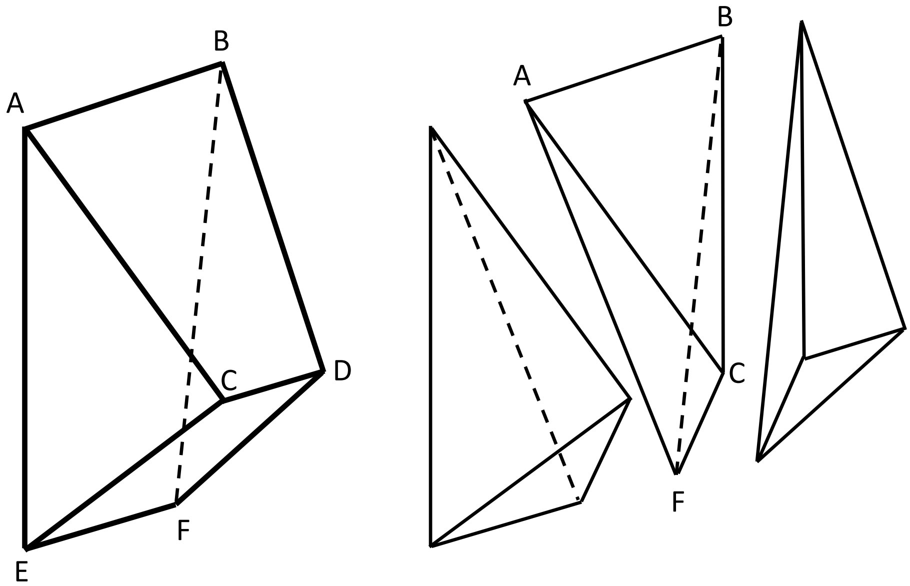
3 **1.2** Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene G zum Boden.

3 **1.3** Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des dreieckigen Seitenteils AEC.

4 **1.4** Die Decke der Halle, an der eine Überwachungskamera angebracht werden soll, liegt in der Ebene $H: x_3 - 26 = 0$. Um alle Bereiche der Kletterwand zu erfassen, muss die Kamera weit genug von der Rückwand AE_1F_1B entfernt sein. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebene G und der Ebene H. Der Abstand dieser Schnittgeraden s zur x_1-x_3-Koordinatenebene entspricht dem Mindestabstand der Kamera von der Rückwand AE_1F_1B in Dezimeter. Geben Sie diesen Abstand an.

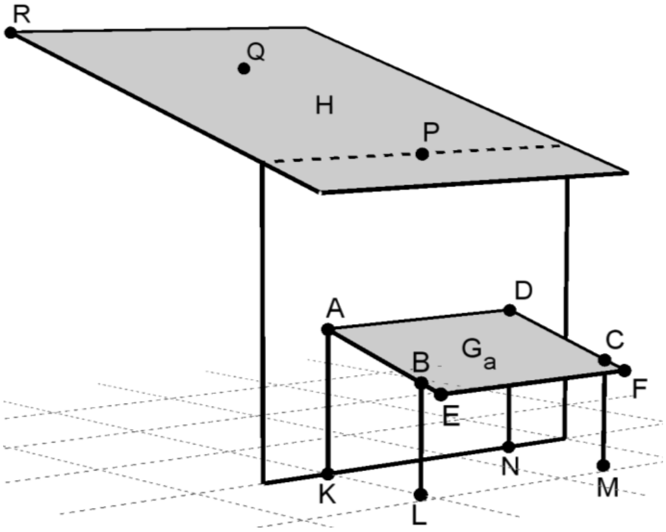
Fortsetzung siehe nächste Seite

BE		
4	**1.5**	Der Punkt K ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Vierecks ACDB. Zur Stabilisierung wird innerhalb der Kletterwand ein Stahlträger am Punkt K angebracht, der senkrecht zur Kletterfläche ACDB steht. Beschreiben Sie, wie der Montagepunkt des Stahlträgers an der Rückwand AE_1F_1B ermittelt werden kann, ohne die Rechnung durchzuführen.
4	**1.6**	Der Körper ABCDEF kann in drei Teilkörper zerlegt werden (siehe Skizze). Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABCF.
23		



BE

1.0 Das Dach eines Hauses liegt in einer Ebene H. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist die Ebene H durch die drei Punkte $P(5|0|8)$, $Q(5|-7{,}2|10)$ und $R(10|-10{,}8|11)$ festgelegt. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.



6 **1.1** Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung der Ebene H in Parameter- und Koordinatenform und beschreiben Sie deren besondere Lage im Koordinatensystem.
[mögliches Teilergebnis: $H: 5x_2 + 18x_3 = 144$]

3 **1.2** Die Größe des Neigungswinkels des Daches H gegen die Horizontale muss gemäß einer örtlichen Bauvorschrift mindestens 15° betragen. Zeigen Sie rechnerisch, dass die örtliche Bauvorschrift eingehalten wird.

Zur Überdachung der Terrasse KLMN, die in der x_1-x_2-Koordinatenebene liegt, wird ein rechteckiges Glasdach AEFD, dessen Neigungswinkel verstellbar ist, aufgebaut.
Das Glasdach liegt in der Ebene $G_a: (-1{,}8a+9{,}9)x_1 + (36-6a)x_2 + 10{,}8x_3 + 14{,}4a = 119{,}16$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

3 **1.3** Die Ebenen H und G_a sollen parallel zueinander liegen. Ermitteln Sie hieraus den Wert des zugehörigen Parameters a.
[Ergebnis: $a = 5{,}5$]

2 **1.4** Zeigen Sie, dass die Punkte $A(8|0|3{,}7)$ und $B(8|3{,}42|2{,}75)$ in der Ebene $G_{5,5}$ liegen.

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $D(2|0|3{,}7)$ und $K(8|0|0)$.

3 **1.5** Das Glasdach AEFD ist festgelegt durch die Punkte A, E und D.
Aus statischen Gründen darf die Glasüberdachung nur um maximal 20 % der Länge von $\overline{AB}$ über den Punkt B hinausragen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes E, wenn die maximal zulässige Länge vollständig ausgenutzt wird.
Hinweis: $\left|\overrightarrow{AE}\right| = 1{,}2 \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$

6 **1.6** Als Windschutz sollen die drei Seitenflächen AKLB, BLMC und DNMC verglast werden. Der umbaute Raum besitzt die Form eines geraden trapezförmigen Prismas. Geben Sie die Koordinaten des Punktes L an. Berechnen Sie die Materialkosten für die drei Seitenflächen, wenn der Preis 200 € pro 1 m² beträgt.

23