

## Fachabiturprüfung 2023

zum Erwerb der Fachhochschulreife  
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Montag, 22. Mai 2023, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

# Mathematik

## Ausbildungsrichtung Technik - CAS

### Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Lineare Algebra und analytische Geometrie* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Der Lösungsweg von Aufgaben ist zu dokumentieren und nachvollziehbar darzustellen.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Gegeben ist die ganzrationale Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{32}(x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 104x + 64)$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ . Ihr Graph  $G_f$  in einem kartesischen Koordinatensystem besitzt bei  $x=2$  einen Terrassenpunkt.

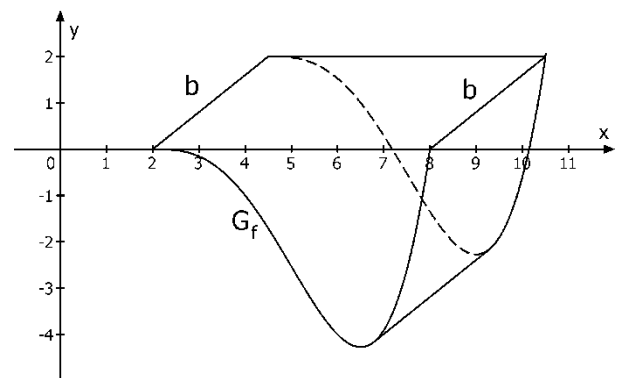
Nur im Bereich  $2 \leq x \leq 8$  beschreibt der Graph  $G_f$  dabei den Boden eines Teichbeckens im Querschnitt. Das Teichbecken ist bis zur  $x$ -Achse vollständig mit Wasser gefüllt. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter.

Auf das Mitführen der Einheiten kann während der Berechnungen verzichtet werden.

- 1.1** Berechnen Sie nachvollziehbar die maximale Wassertiefe des Teichbeckens auf cm genau.
- 1.2** Ermitteln Sie die Stelle, an welcher der Boden des Teichbeckens im Bereich  $]2; 6,5[$  das stärkste Gefälle aufweist. Geben Sie das Gefälle an dieser Stelle an.

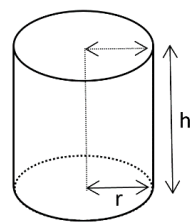
- 1.3** Das Teichbecken hat eine konstante Breite  $b$  von 4,0 m (siehe Grafik).

Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sich im vollständig mit Wasser gefüllten Teichbecken  $48,6 \text{ m}^3$  Wasser befinden.



- 1.4** Nach einer längeren Hitzeperiode ist der Wasserspiegel im Teichbecken um genau einen Meter gesunken. Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen genau, wieviel Prozent des Wassers verdunstet sind, wenn das Teichbecken vor der Hitzeperiode komplett mit Wasser gefüllt war.

- 1.5.0** Damit das Teichwasser keimfrei bleibt, soll eine Chlormischung zugesetzt werden, die in zylinderförmigen Dosen aus Blech verkauft wird. Der Hersteller dieser Dosen möchte pro Dose nicht mehr als  $600 \text{ cm}^2$  Blech verbrauchen. Der Dosenradius soll dabei nicht kleiner als 1 cm und nicht größer als 9 cm sein.



- 1.5.1** Stellen Sie eine Gleichung der Funktion  $V$  auf, welche das Dosenvolumen  $V(r)$  in Abhängigkeit vom Dosenradius  $r$  angibt, wenn pro Dose inklusive Boden und Deckel genau  $600 \text{ cm}^2$  Blech verwendet werden.

[mögliches Ergebnis:  $V(r) = -\pi r^3 + 300r$ ]

- 1.5.2** Bestimmen Sie auf mm genau den Radius  $r$ , bei dem das Dosenvolumen aus 1.5.1 maximal wird, und geben Sie das maximale Dosenvolumen auf  $\text{cm}^3$  genau an.

**Fortsetzung siehe nächste Seite**

BE

**2.0** Die Zugabe von Chlor in das Beckenwasser eines Schwimmbads soll die Vermehrung von Bakterien hemmen. Für eine genauere Untersuchung, ab welchem Zeitpunkt die Zugabe von Chlor notwendig ist, wird etwas Beckenwasser entnommen und im Labor untersucht. Dort wurde für einen Bakterienstamm ohne Zugabe von Chlor ein beschränktes Wachstum beobachtet. Das heißt, dass sich die Bakterienkonzentration in  $\frac{\text{KbE}}{\text{ml}}$  (Anzahl der koloniebildenden Einheiten pro ml Wasser) als Funktionswerte der

Funktion  $B: t \mapsto 200 + (B_0 - 200) \cdot e^{-kt}$  mit  $B_0, k \in \mathbb{R}^+$  und  $t \in \mathbb{R}_0^+$  modellieren lässt.

Dabei gibt  $t$  die Zeit in Stunden an, die seit Beobachtungsbeginn vergangen ist. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Rechnungen verzichtet werden.

**2.1** Für die momentane Wachstumsrate  $\dot{B}$  der Funktion  $B$  gilt:

$$\dot{B}(t) = k \cdot (200 - B(t)) \quad (*)$$

Bei der Untersuchung im Labor betrug 2,75 Stunden nach Beobachtungsbeginn die Bakterienkonzentration  $30 \frac{\text{KbE}}{\text{ml}}$  und die momentane Wachstumsrate  $\dot{B}$  war zu diesem Zeitpunkt  $8,5 \frac{\text{KbE}}{\text{ml}}$  pro Stunde.

Berechnen Sie mithilfe der Gleichung (\*) die Konstante  $k$  und bestimmen Sie anschließend die Konstante  $B_0$ . Runden Sie sinnvoll.

**2.2.0** Für die folgenden Teilaufgaben gilt:  $k = 0,05$  und  $B_0 = 5$ .

**2.2.1** Im Beckenwasser wird ab einem Wert von  $100 \frac{\text{KbE}}{\text{ml}}$  die Zugabe von Chlor empfohlen. Bestimmen Sie rechnerisch auf eine Nachkommastelle genau, zu welchem Zeitpunkt dieser Wert von dem im Labor beobachteten Bakterienstamm erreicht wurde.

**2.2.2** Zeichnen Sie für  $0 \leq t \leq 50$  den Graphen  $G_B$  sowie seine Asymptote in ein kartesisches Koordinatensystem.

Maßstäbe:  $1 \text{ cm} \hat{=} 5 \text{ h}$  ;  $1 \text{ cm} \hat{=} 25 \frac{\text{KbE}}{\text{ml}}$

**2.2.3** Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen nachvollziehbar einen Näherungswert für die momentane Wachstumsrate der Bakterienkonzentration 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

43

BE

**1.0** Die Funktion  $f_a$  mit der Definitionsmenge  $D_{f_a} = \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$  besitzt die erste Ableitungsfunktion  $f'_a$  mit der Funktionsgleichung  $f'_a(x) = \frac{1}{8}x(x^2 - a)$ .

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_{f_a}$  bezeichnet.

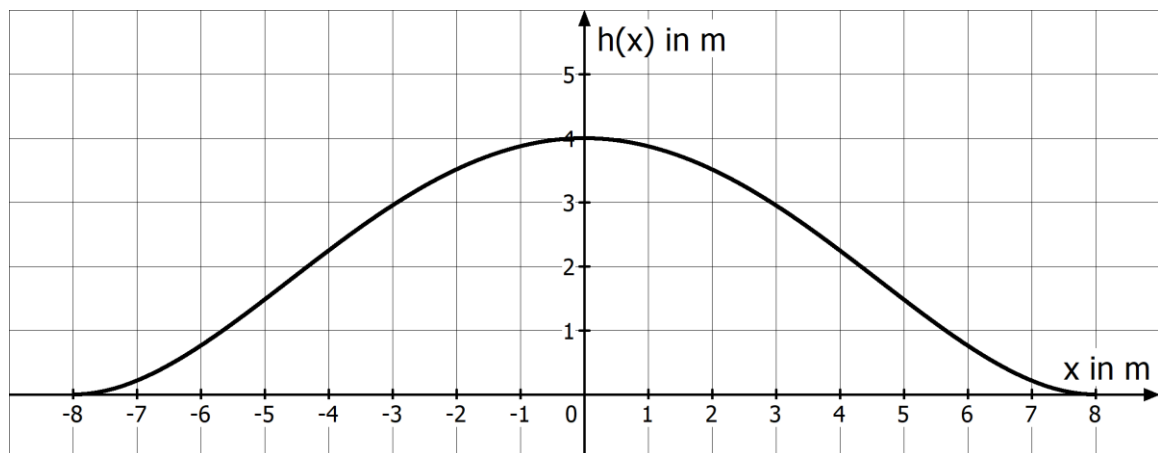
**3 1.1** Begründen Sie, dass für alle  $a \in \mathbb{R}$  der Graph von  $f_a$  achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft.

**8 1.2** Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $a \in \mathbb{R}$  die Stellen, an denen der Graph von  $f_a$  eine waagrechte Tangente besitzt, und ermitteln Sie, um welche Art es sich bei diesen Stellen handelt.

**2.0** In unmittelbarer Nähe eines Flusses wurde zum Schutz der Anwohner vor Hochwasser ein Damm auf einem ebenen Gelände errichtet. Von der Vogelperspektive aus betrachtet verläuft der Damm geradlinig und hat eine Länge von 800 Meter. Im Querschnitt hat der Damm das unten abgebildete Profil, welches durch den zur y-Achse symmetrischen Graphen der Funktion  $h: x \mapsto \frac{1}{1024}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + 4$  mit der Definitionsmenge  $D_h = [-8; 8]$  beschrieben werden kann.

Die x-Koordinaten stehen für Längenangaben in der Einheit Meter. Die Funktionswerte von  $h$  geben die Höhe des Damms gegenüber dem ebenen Gelände in der Einheit Meter an.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse gegebenenfalls sinnvoll.



**3 2.1** Der Bau des Damms hat 2,5 Millionen Euro gekostet. Berechnen Sie das Volumen sowie die durchschnittlichen Kosten in Euro pro Kubikmeter des Damms. Hierzu benötigte Werte dürfen obiger Abbildung entnommen werden.

**8 2.2** Aus bautechnischen Gründen darf das Profil des Damms im Querschnitt um maximal  $40^\circ$  gegenüber dem planen Grundstück geneigt sein. Berechnen Sie die maximale Steigung des Profils und überprüfen Sie damit, ob diese Bauvorgabe eingehalten wurde.

*Fortsetzung siehe nächste Seite*

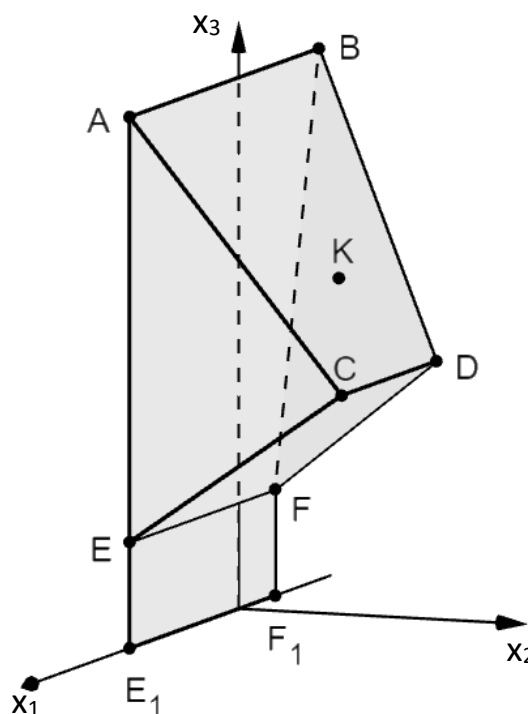
BE

- 6 **2.3** Nach verschiedenen Hochwasserfreilegungen legt das zuständige Wasserwirtschaftsamt fest, dass eine Dammhöhe von 3,75 Meter ausreicht, um den entsprechenden Hochwasserschutz zu gewährleisten.  
Daher wird nun geplant, den Damm im oberen Bereich über die gesamte Breite abzuflachen und dadurch einen Geh- und Radweg zu realisieren, der über der gesamten Strecke auf konstanter Höhe 3,75 Meter verläuft.  
Berechnen Sie **ohne CAS** die maximal mögliche Breite dieses Geh- und Radwegs.
- 3.0** In einem kleinen Wald mit einem festen Baumbestand hat man am 1. Februar 2015 festgestellt, dass 160 Bäume vom Borkenkäfer befallen waren. Da man beschlossen hat, zu Forschungszwecken die Ausbreitung des Borkenkäfers in diesem Wald zu untersuchen, wurde die Anzahl der Bäume in diesem Wald stets konstant gehalten. Das heißt, dass keine neuen Bäume gepflanzt und vom Borkenkäfer befallene Bäume nicht gefällt wurden. Genau zwei Jahre später hat man in diesem Wald dann insgesamt 289 Bäume gezählt, die vom Borkenkäfer befallen waren.
- Die Anzahl der vom Borkenkäfer befallenen Bäume in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  wird näherungsweise durch die Modellfunktion  $N$  beschrieben. Der jeweilige Funktionswert  $N(t)$  gibt die Anzahl der vom Borkenkäfer befallenen Bäume zum Zeitpunkt  $t$  an, wobei  $t$  die seit Beobachtungsbeginn am 1. Februar 2015 verstrichene Zeit in Jahren angibt.
- Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls sinnvoll. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.
- 3 **3.1** Bestimmen Sie  $c$  und  $d$  so, dass die Funktion  $N: t \mapsto d - 660 \cdot e^{-ct}$  mit  $t \in \mathbb{R}$  und  $c, d \in \mathbb{R}^+$  eine geeignete Modellfunktion ist.
- 3.2.0** Im Folgenden wird vereinfachend angenommen:  $N(t) = 820 - 660 \cdot e^{-0,11 \cdot t}$
- 4 **3.2.1** Man nimmt an, dass auf lange Sicht alle Bäume des Waldes vom Borkenkäfer befallen werden. Geben Sie an, wie viele Bäume demnach in dem Waldstück insgesamt vorhanden sind, und ermitteln Sie anschließend, in welchem Kalenderjahr nach dem Modell erstmals mehr als 70 % des Baumbestands vom Borkenkäfer befallen sind.
- 3 **3.2.2** Ermitteln Sie, in welchem Kalenderjahr der Borkenkäfer den Wald befallen hat, wenn man annimmt, dass die Modellfunktion  $N$  den Verlauf der befallenen Bäume bereits ab Beginn des Käferbefalls beschreibt.
- 5 **3.2.3** Zeigen Sie durch algebraische Umformungen, dass gilt:  $N(t+1) - N(t) \approx 69 \cdot 0,9^t$   
Geben Sie die Bedeutung dieses Terms im Sachkontext an.

43

BE

- 1.0** In einer Kletterhalle für Kinder soll eine Wand mit Überhang gebaut werden, welche modellhaft in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  betrachtet wird. Der Boden der Kletterhalle liegt in der  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatenebene. Die Ebene  $G$ , die den Überhang bildet, ist durch die Punkte  $E(15|0|5)$ ,  $C(12|9|12)$  und  $D(-1|9|12)$  festgelegt. Zudem sind die Punkte  $A(15|0|25)$ ,  $B(-11|0|25)$  und  $F(-2|0|5)$  gegeben. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Dezimeter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnung kann verzichtet werden. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.



- 1.1** Bestimmen Sie nachvollziehbar je eine Gleichung der Ebene  $G$  in Parameterform sowie in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von  $G$  im Koordinatensystem. [ Mögliches Ergebnis:  $G: 7x_2 - 9x_3 + 45 = 0$  ]
- 1.2** Berechnen Sie nachvollziehbar den Neigungswinkel der Ebene  $G$  zum Boden.
- 1.3** Stellen Sie einen mathematischen Ansatz auf, mit dem sich die Maßzahl  $A_{AEC}$  des Flächeninhalts des dreieckigen Seitenteils  $AEC$  berechnen lässt. Berechnen Sie anschließend  $A_{AEC}$ .
- 1.4** Die Decke der Halle, an der eine Überwachungskamera angebracht werden soll, liegt in der Ebene  $H: x_3 - 26 = 0$ . Um alle Bereiche der Kletterwand zu erfassen, muss die Kamera weit genug von der Rückwand  $AE_1F_1B$  entfernt sein. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden  $s$  der Ebene  $G$  und der Ebene  $H$ . Der Abstand dieser Schnittgeraden  $s$  zur  $x_1$ - $x_3$ -Koordinatenebene entspricht dem Mindestabstand der Kamera von der Rückwand  $AE_1F_1B$  in Dezimeter. Geben Sie diesen Abstand an.

Fortsetzung siehe nächste Seite

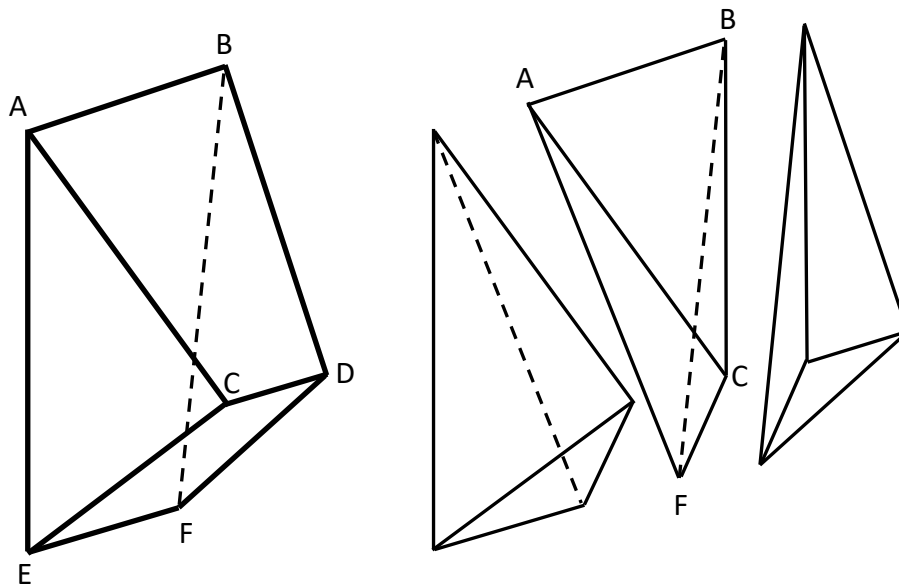
BE

4

**1.5** Der Punkt K ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Vierecks ACDB. Zur Stabilisierung wird innerhalb der Kletterwand ein Stahlträger am Punkt K angebracht, der senkrecht zur Kletterfläche ACDB steht. Beschreiben Sie, wie der Montagepunkt des Stahlträgers an der Rückwand  $AE_1F_1B$  ermittelt werden kann, ohne die Rechnung durchzuführen.

4

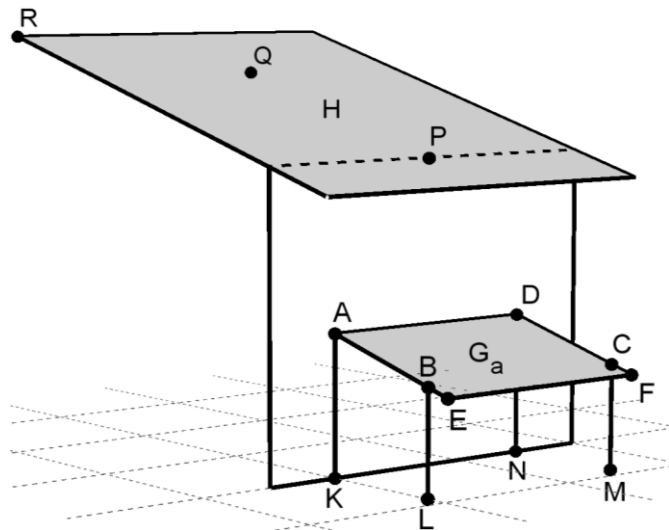
**1.6** Der Körper ABCDEF kann in drei Teilkörper zerlegt werden (siehe Skizze). Berechnen Sie **ohne CAS** die Maßzahl des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABCF.



23

BE

- 1.0 Das Dach eines Hauses liegt in einer Ebene  $H$ . In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  ist die Ebene  $H$  durch die drei Punkte  $P(5|0|8)$ ,  $Q(5|-7,2|10)$  und  $R(10|-10,8|11)$  festgelegt. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.



- 6 1.1 Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung der Ebene  $H$  in Parameter- und Koordinatenform und beschreiben Sie deren besondere Lage im Koordinatensystem.  
[ mögliches Teilergebnis:  $H: 5x_2 + 18x_3 = 144$  ]
- 3 1.2 Die Größe des Neigungswinkels des Daches  $H$  gegen die Horizontale muss gemäß einer örtlichen Bauvorschrift mindestens  $15^\circ$  betragen. Zeigen Sie rechnerisch **ohne CAS**, dass die örtliche Bauvorschrift eingehalten wird.

Zur Überdachung der Terrasse  $KLMN$ , die in der  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatenebene liegt, wird ein rechteckiges Glasdach  $AEFD$ , dessen Neigungswinkel verstellbar ist, aufgebaut.

Das Glasdach liegt in der Ebene  $G_a: (-1,8a + 9,9)x_1 + (36 - 6a)x_2 + 10,8x_3 + 14,4a = 119,16$  mit dem Parameter  $a \in \mathbb{R}$ .

- 3 1.3 Die Ebenen  $H$  und  $G_a$  sollen parallel zueinander liegen. Ermitteln Sie hieraus den Wert des zugehörigen Parameters  $a$ .  
[ Ergebnis:  $a = 5,5$  ]
- 2 1.4 Zeigen Sie, dass die Punkte  $A(8|0|3,7)$  und  $B(8|3,42|2,75)$  in der Ebene  $G_{5,5}$  liegen.

Für die folgenden Teilaufgaben gilt:  $D(2|0|3,7)$  und  $K(8|0|0)$ .

- 3 1.5 Das Glasdach  $AEFD$  ist festgelegt durch die Punkte  $A$ ,  $E$  und  $D$ . Aus statischen Gründen darf die Glasüberdachung nur um maximal 20 % der Länge von  $\overline{AB}$  über den Punkt  $B$  hinausragen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes  $E$ , wenn die maximal zulässige Länge vollständig ausgenutzt wird.  
Hinweis:  $|\overrightarrow{AE}| = 1,2 \cdot |\overrightarrow{AB}|$
- 6 1.6 Als Windschutz sollen die drei Seitenflächen  $AKLB$ ,  $BLMC$  und  $DNMC$  verglast werden. Der umbaute Raum besitzt die Form eines geraden trapezförmigen Prismas. Geben Sie die Koordinaten des Punktes  $L$  an. Berechnen Sie die Materialkosten für die drei Seitenflächen, wenn der Preis 200 € pro  $1 \text{ m}^2$  beträgt.

23